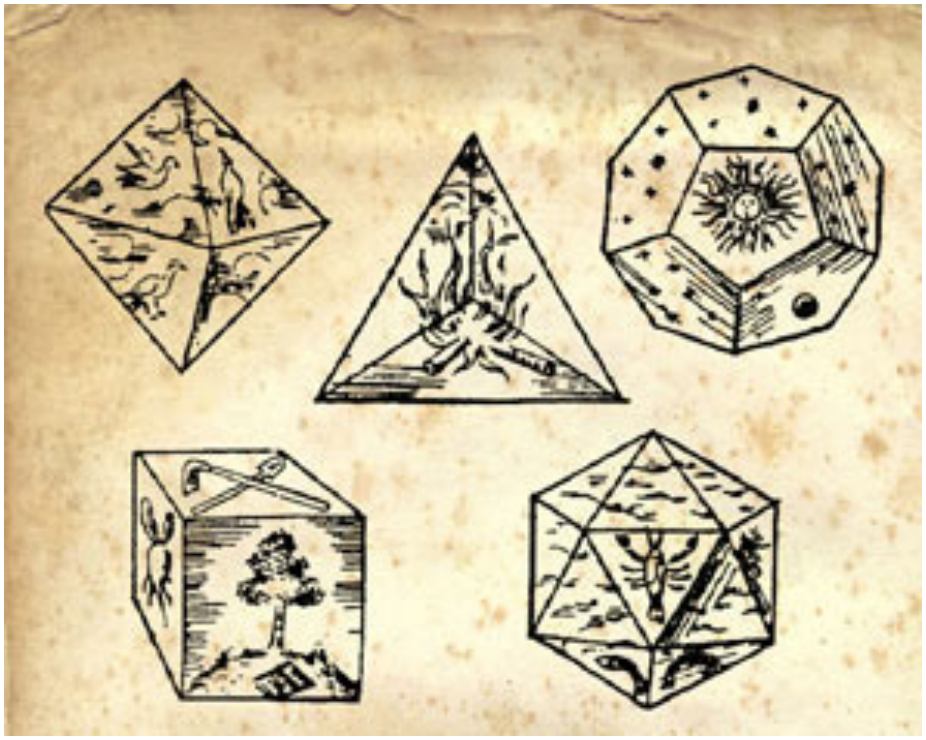
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

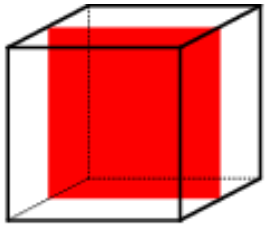
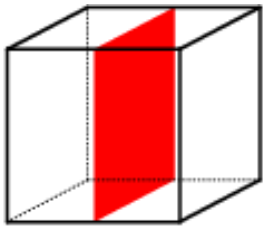
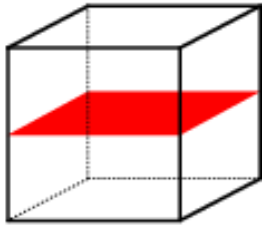
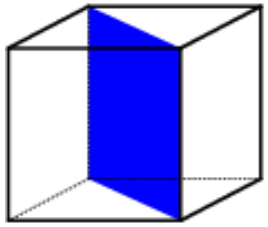
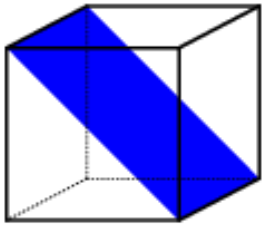
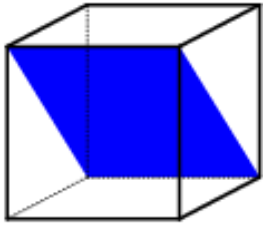
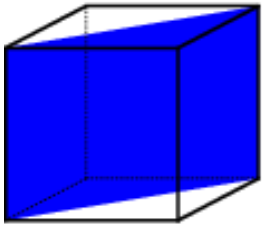
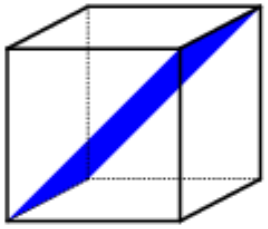
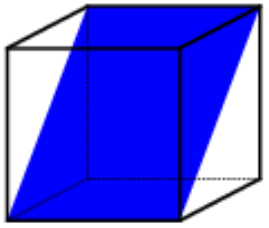
Geometria dello spazio



Introduzione

TAGLIARE CUBI La geometria dello spazio è una parte della matematica molto concreta, perché strettamente legata all'ambiente in cui tutti noi viviamo. Nonostante ciò, ragionare nello spazio non è semplice, così come non è facile rappresentare su un piano costruzioni tridimensionali. Il cubo sembra un solido semplice, ma…

Che tipo di figure si ottengono sezionando un cubo con un piano?

Abbiamo già visto che gli enti fondamentali della geometria sono: il punto, la retta, il piano e lo spazio.

Nello spazio studieremo le **figure solide**, o **solidi**, cioè le figure formate da un insieme di punti che non appartengono tutti a uno stesso piano.

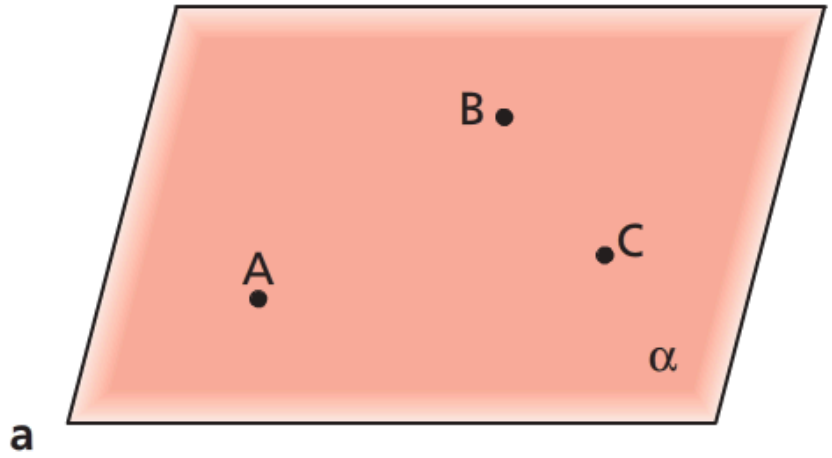
● Indichiamo i punti con le lettere maiuscole A, B, C, …, le rette con le lettere minuscole a, b, c, …, i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco α, β, γ, …

Punti, rette e piani nello spazio

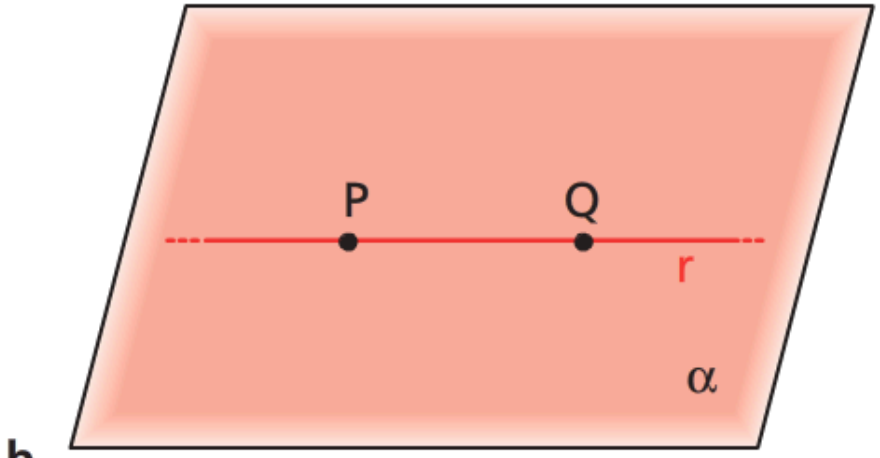
Alcuni postulati dello spazio

1. Per tre punti non allineati passa uno e un solo piano (figura 1*a*).

2. Fissati due punti in un piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano (figura 1*b*).



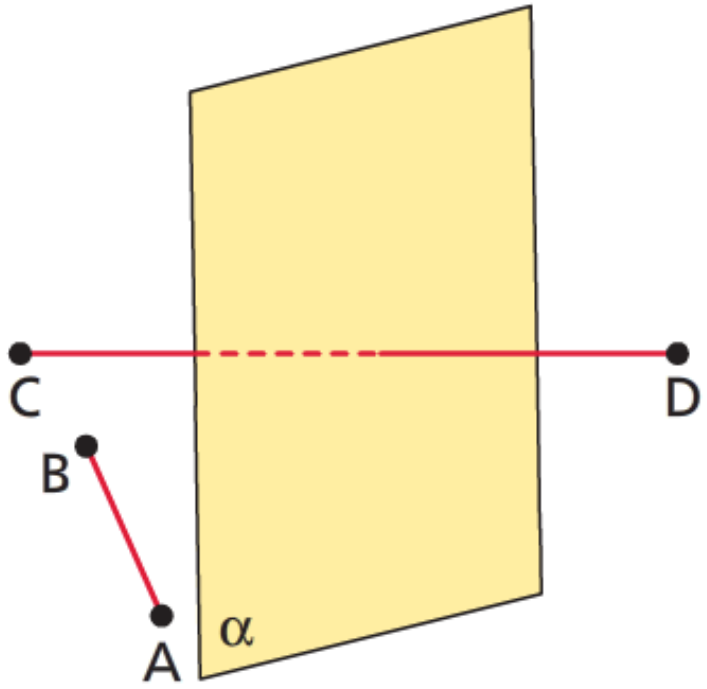
a



b

3. **Postulato di partizione dello spazio.** Un qualunque piano divide l'insieme dei punti dello spazio che non gli appartengono in due regioni dette **semispazi** con le seguenti proprietà:
   - due punti qualsiasi della stessa regione sono gli estremi di un segmento che non interseca il piano;
   - due punti qualsiasi di regioni diverse sono gli estremi di un segmento che interseca il piano.

   Il piano si dice **origine** dei semispazi.

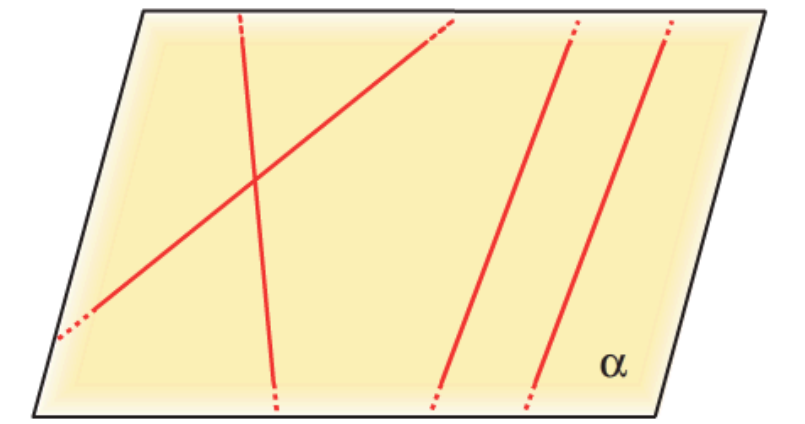


La posizione di due rette nello spazio

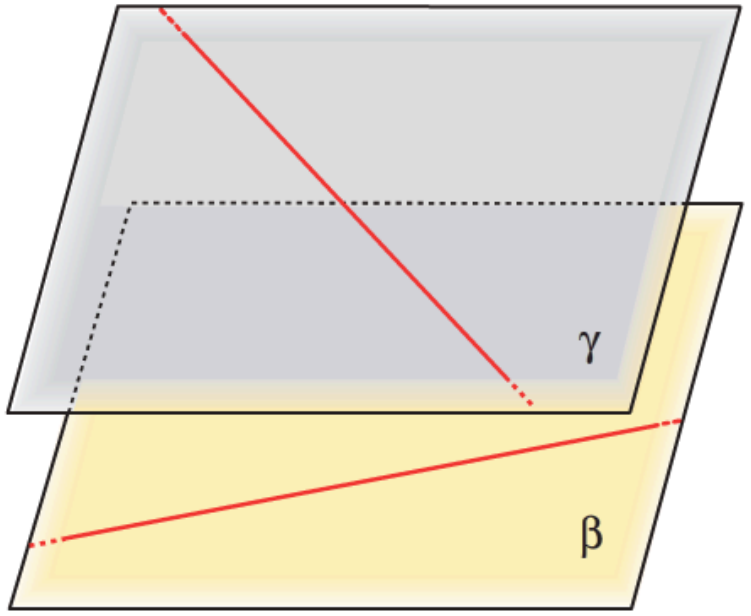
Se due rette nello spazio appartengono a uno stesso piano, si dicono **complanari**, in caso contrario si dicono **sghembe**.

Se le rette sono complanari, le posizioni possibili sono quelle già studiate nel piano, cioè le rette possono essere **incidenti** o **parallele**.

● Due rette sghembe non hanno punti in comune.



a. Rette complanari.



b. Rette sghembe.

La posizione di due piani nello spazio

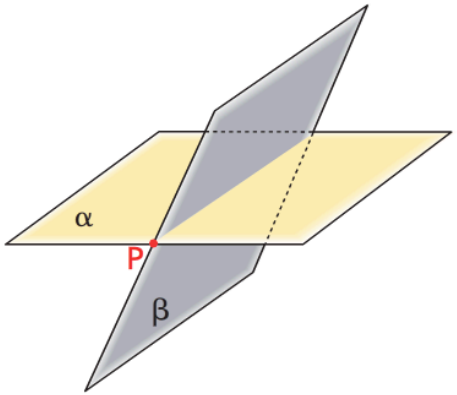
TEOREMA

Due piani distinti, che si intersecano in un punto, hanno in comune una retta che passa per quel punto.

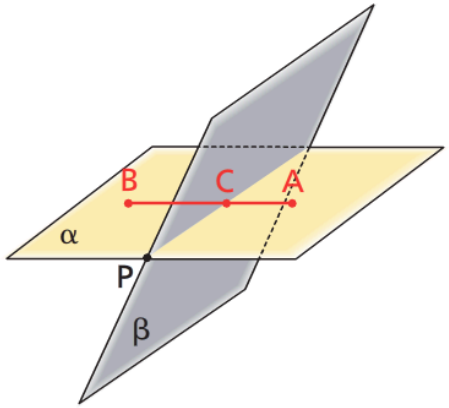
Ipotesi $P \in \alpha \cap \beta$.

Tesi $\exists\, r \mid P \in r,\ r \in \alpha \cap \beta$

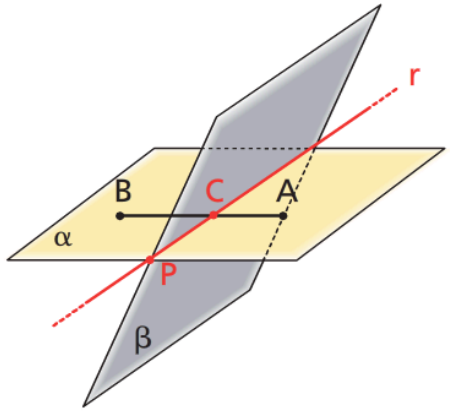
dimostrazione



a. Il punto *P* è in comune ai due piani α e β.

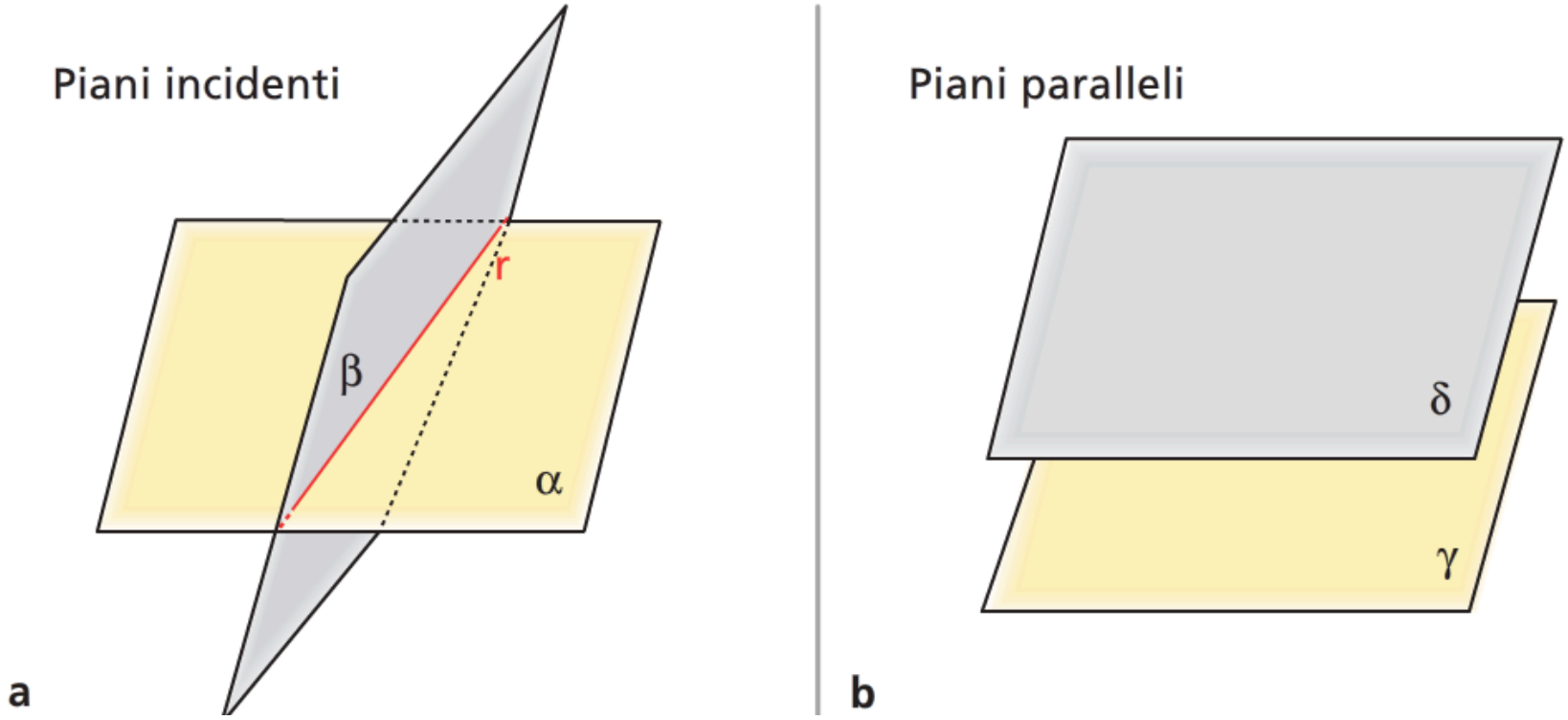


b. Consideriamo i punti *A* e *B*, appartenenti al piano α e scelti in regioni opposte rispetto al piano β. Per il postulato 3 di partizione dello spazio, il segmento *AB* interseca il piano β nel punto *C*. Il punto *C* appartiene anche al piano α, perché per il postulato 2 tutta la retta *AB* appartiene ad α.



c. I punti *P* e *C* appartengono a entrambi i piani, quindi la retta *r* passante per *P* e *C* appartiene anch'essa a entrambi i piani.

Due piani distinti aventi in comune una retta si dicono **incidenti** (figura 4*a*). In caso contrario i piani sono **paralleli** (figura 4*b*).



La relazione di parallelismo fra piani gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, come la relazione di parallelismo fra rette:

- proprietà riflessiva: ogni piano è parallelo a se stesso ($\alpha \parallel \alpha$);
- proprietà simmetrica: se $\alpha \parallel \beta$, è anche $\beta \parallel \alpha$;
- proprietà transitiva: se $\alpha \parallel \beta$ e $\beta \parallel \gamma$, allora $\alpha \parallel \gamma$.

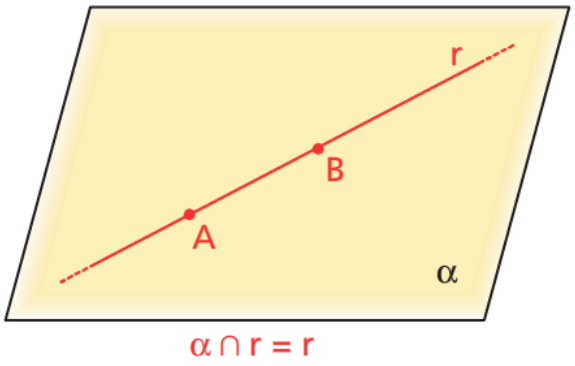
La posizione di una retta e di un piano

Dati una retta e un piano, sono possibili tre casi:

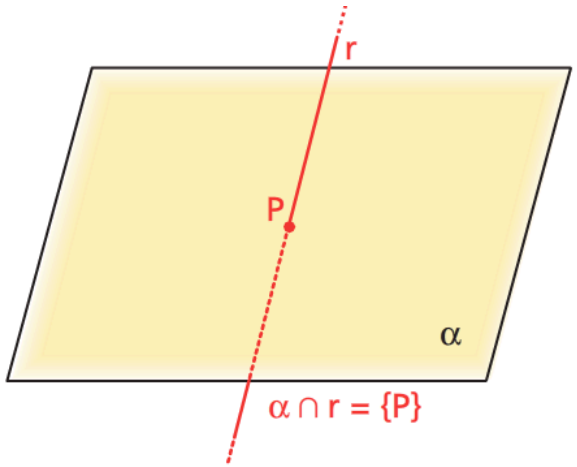
- tutti i punti della retta appartengono al piano, ossia essa è **giacente** sul piano (o **appartenente** al piano) (figura 5*a*);
- la retta ha un solo punto in comune con il piano, ossia è **incidente** al piano (figura 5*b*);

● Per il postulato 2, se una retta ha due punti in comune con un piano, allora giace su quel piano.

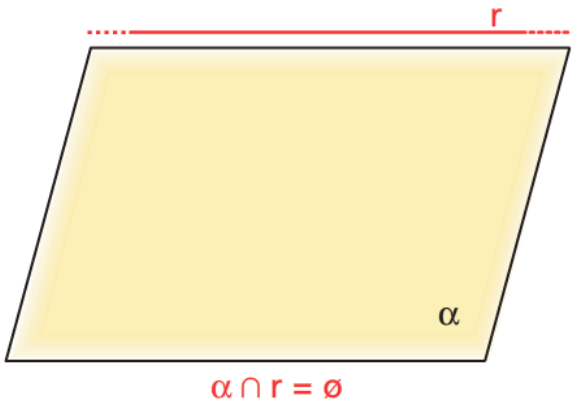
- la retta non ha alcun punto in comune con il piano, ossia è **parallela** al piano (figura 5*c*).



a. La retta *r* è giacente sul piano α.

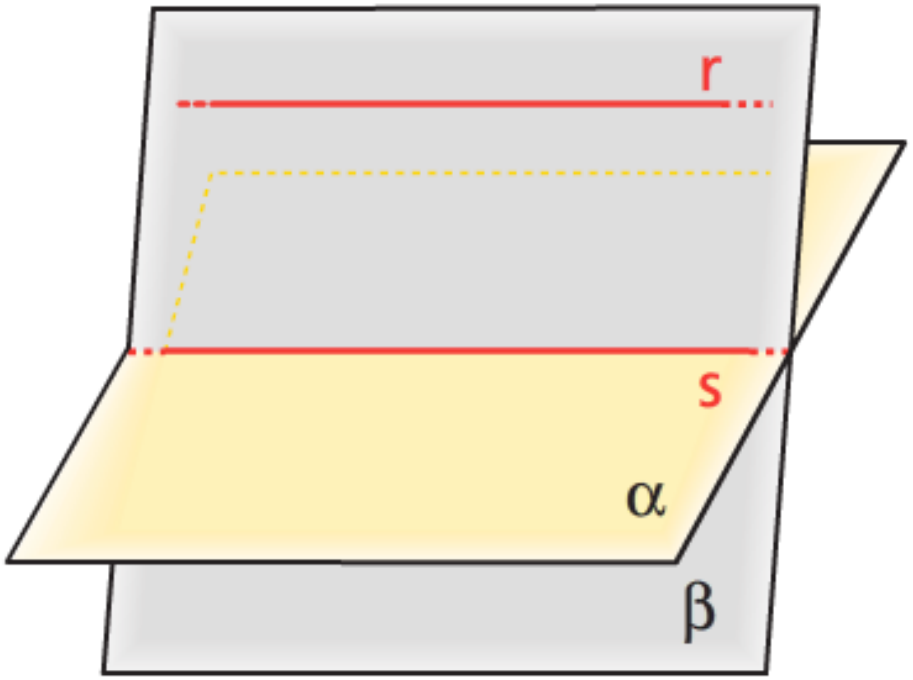


b. La retta *r* è incidente al piano α.



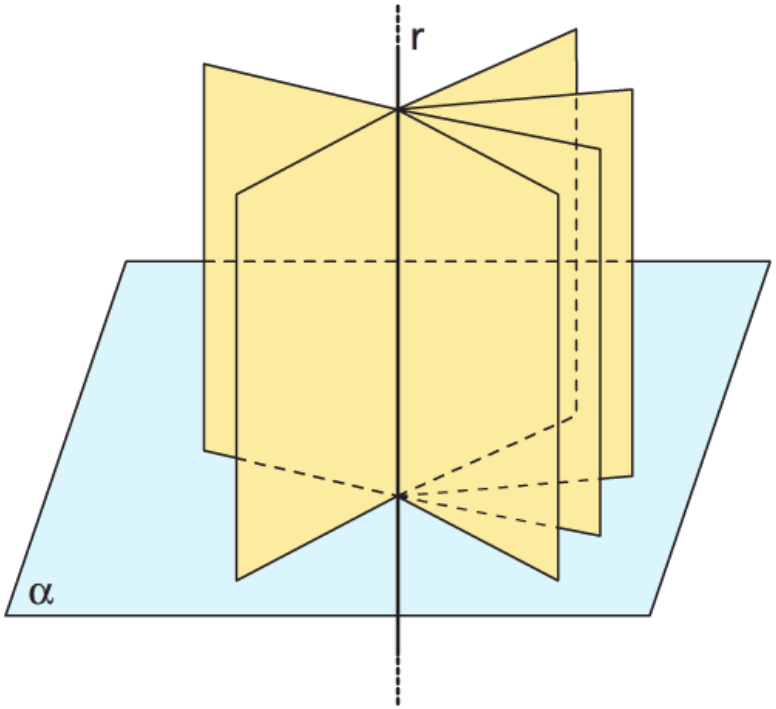
c. La retta *r* è parallela al piano α.

Data una retta *r* parallela a un piano α, ogni altro piano non parallelo ad α e contenente *r* interseca il piano α in una retta *s*, parallela a *r*. Infatti *r* e *s* risultano complanari e non si incontrano mai (figura a lato).



Le rette perpendicolari a un piano

Se appoggiamo un quaderno sul banco, come nella figura 6, e sfogliamo alcune pagine possiamo osservare che ogni pagina del quaderno è appoggiata su un bordo che associamo a una retta e inoltre tutte queste rette si trovano sul piano α e sono perpendicolari alla retta *r*.



La situazione vista è descritta in modo preciso da due teoremi.

TEOREMA

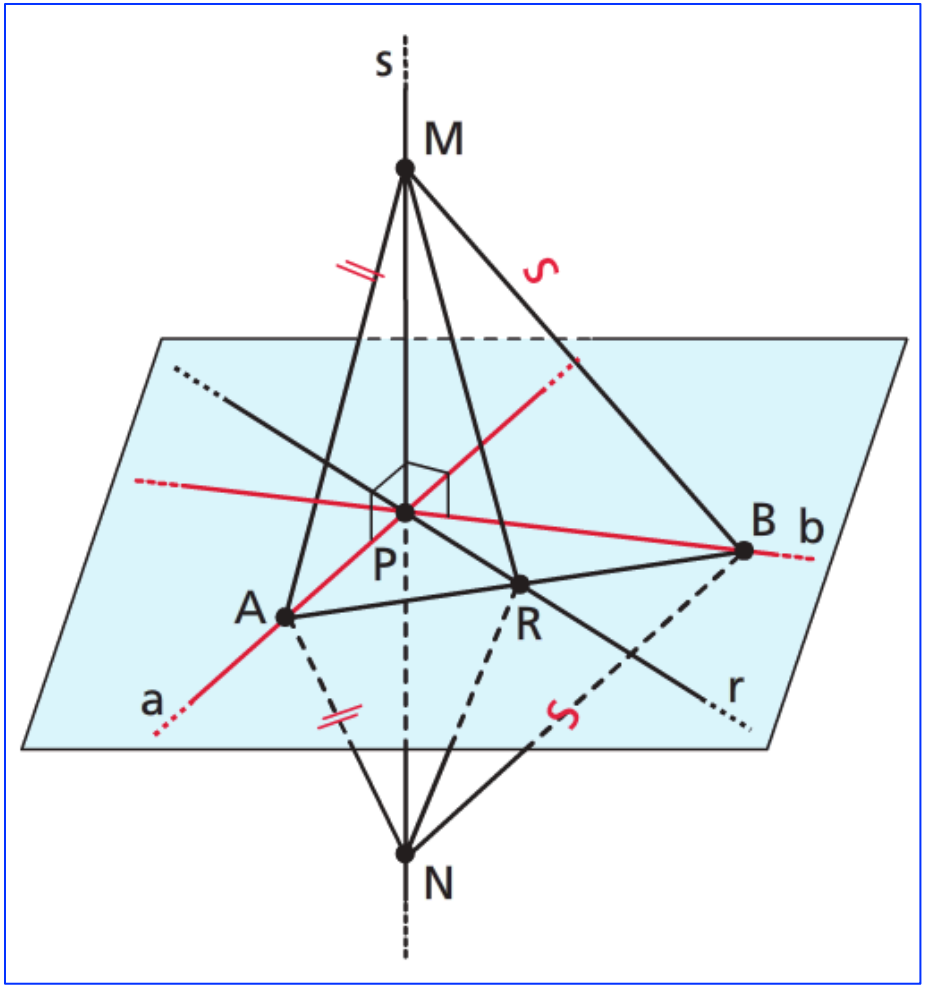
Se per un punto P di una retta s si mandano due rette a e b perpendicolari a s, allora s è perpendicolare a ogni altra retta r passante per P e giacente sul piano delle rette a e b.

Ipotesi

1. $s \cap a \cap b = P$;
2. $s \perp a$, $s \perp b$;
3. $a, b \in \alpha$;
4. $r \in \alpha$, $P \in r$.

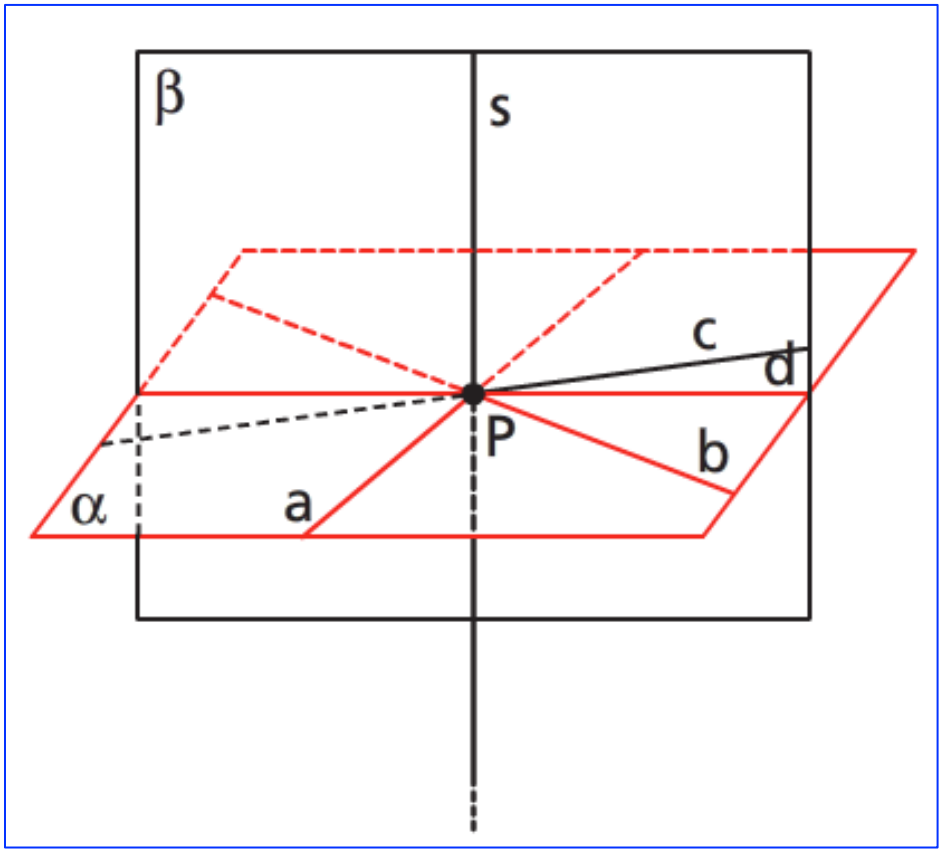
Tesi

$r \perp s$.



TEOREMA

Le perpendicolari a una retta *s* condotte per un suo punto *P* giacciono tutte nello stesso piano.



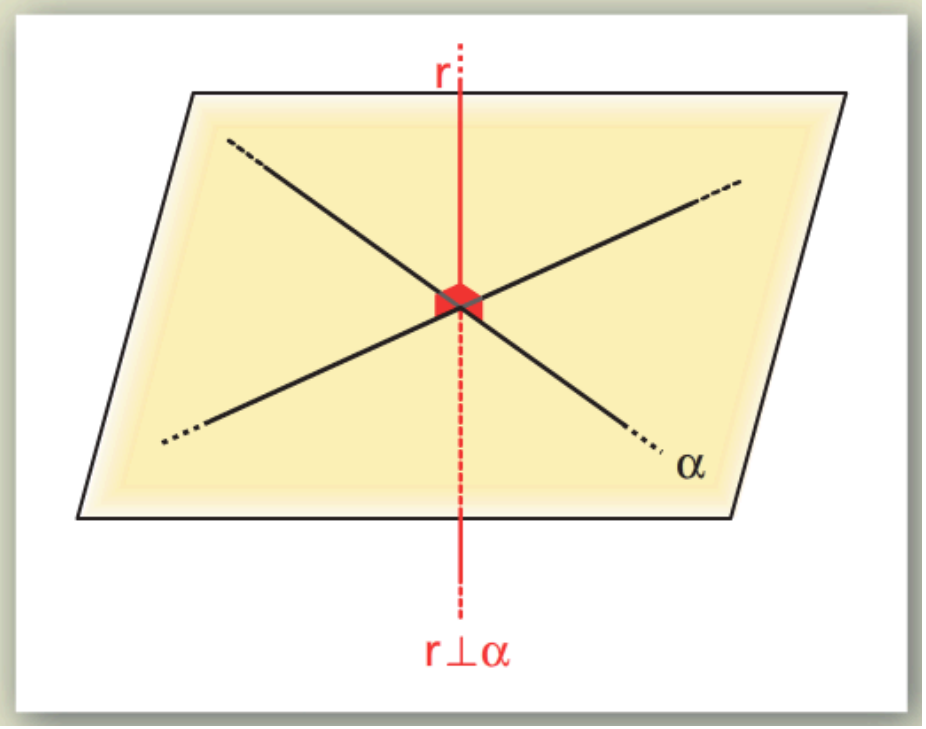
Questi teoremi giustificano la definizione.

DEFINIZIONE

Retta perpendicolare a un piano

Una retta è perpendicolare a un piano quando è incidente al piano e perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza.

- Una retta incidente ma non perpendicolare a un piano si chiama **obliqua**.



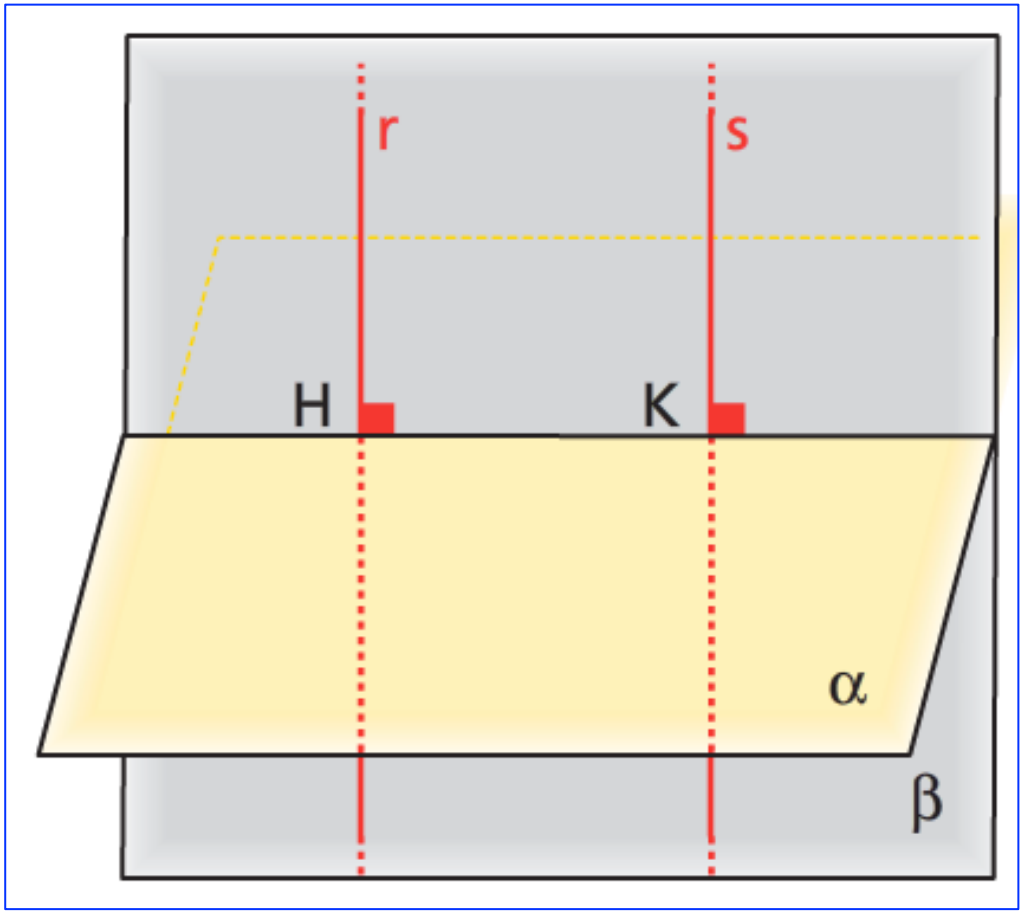
Il punto di incidenza si chiama **piede** della perpendicolare.

Altri teoremi:

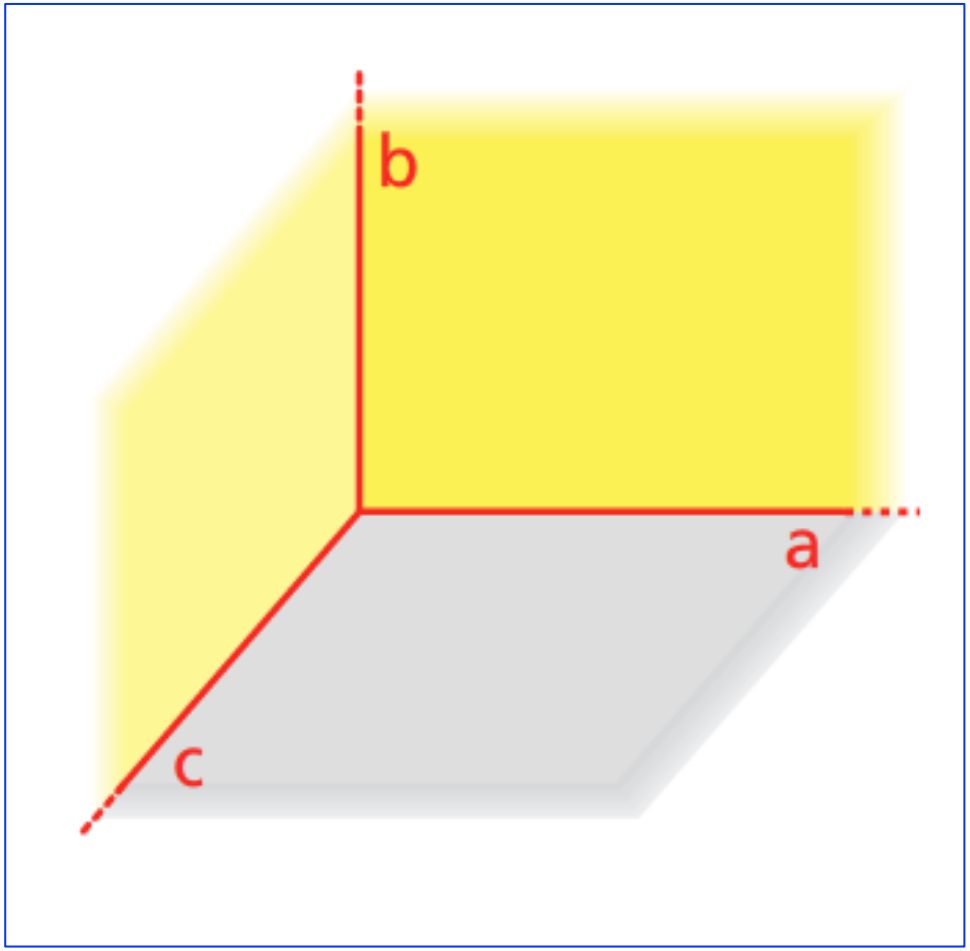
TEOREMA

Due rette perpendicolari a uno stesso piano sono parallele fra loro.

Ipotesi	$r \perp \alpha \wedge s \perp \alpha$.
Tesi	$r \parallel s$.

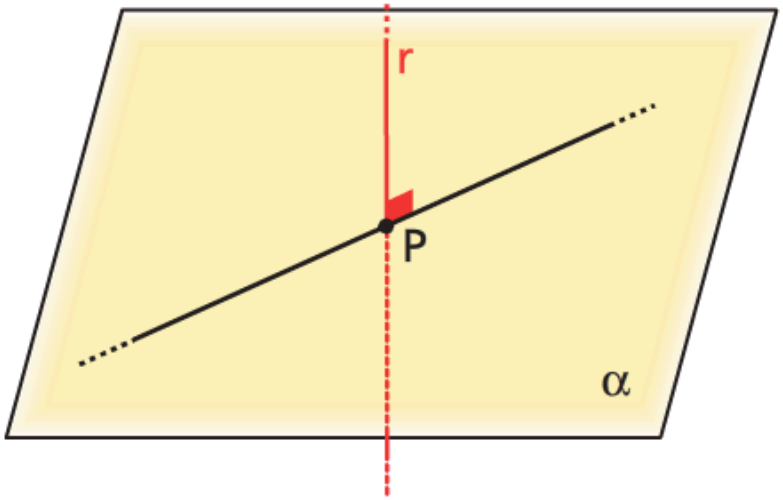


● Nello spazio **non** è valido, invece, il teorema che afferma: «Due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele».
Nella figura che segue $a \perp b$ e $b \perp c$, ma non è vero che $a \parallel c$.

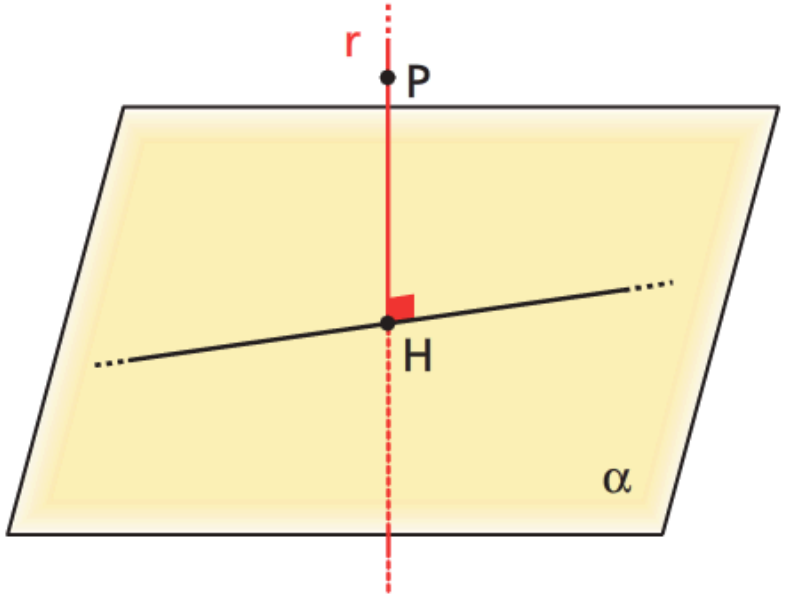


TEOREMA

Dati un piano α e un punto P, esiste ed è unica la retta r passante per il punto e perpendicolare al piano.



a. Il punto *P* appartiene al piano.



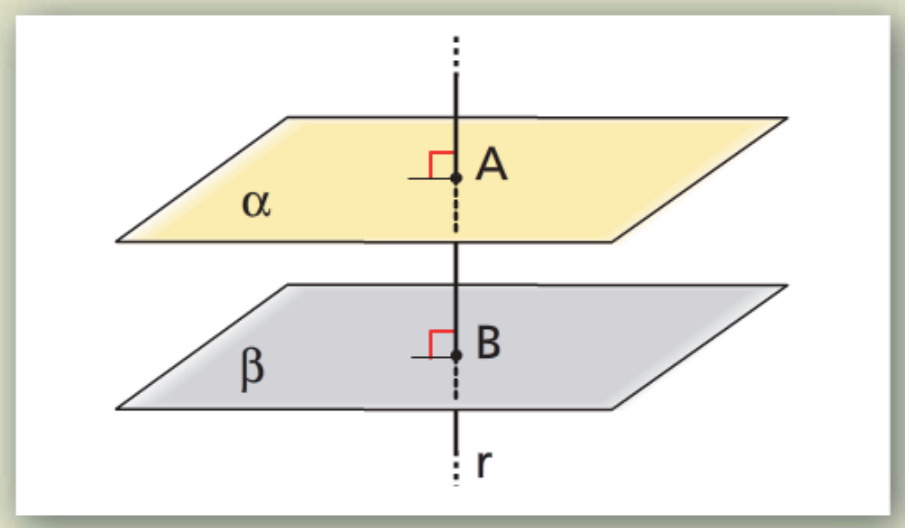
b. Il punto *P* non appartiene al piano.

TEOREMA

Se due piani sono perpendicolari a una stessa retta in punti distinti, allora sono paralleli.

Ipotesi 1. $\alpha \perp r$, $\alpha \cap r = A$;
2. $\beta \perp r$, $\beta \cap r = B$;
3. $A \neq B$.

Tesi $\alpha \parallel \beta$.

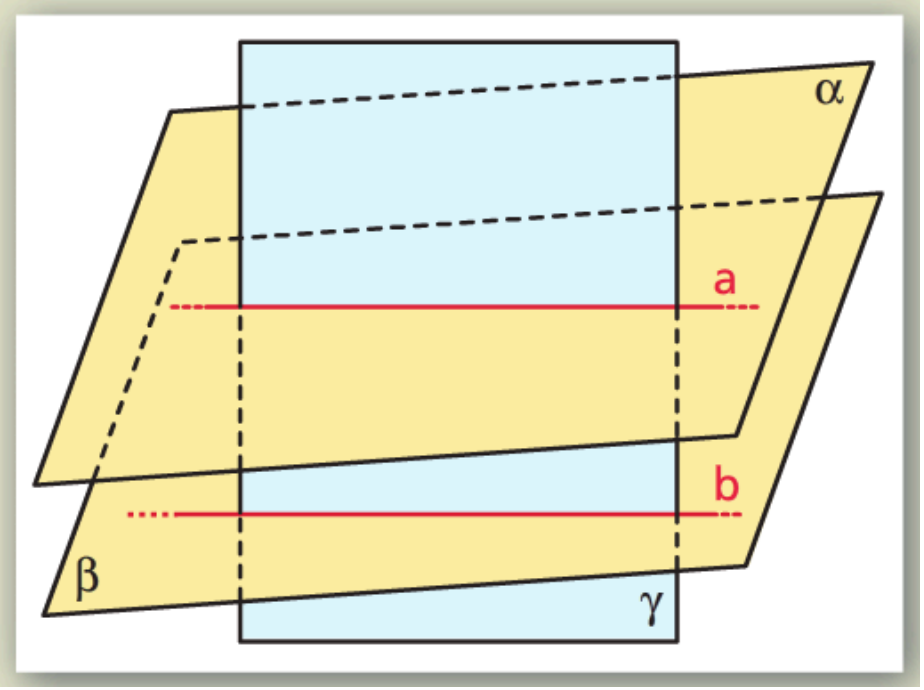


TEOREMA

Le intersezioni tra un piano e due piani paralleli sono rette parallele.

Ipotesi 1. $\alpha \parallel \beta$;
2. $\gamma \cap \alpha = a$,
$\gamma \cap \beta = b$.

Tesi $a \parallel b$.

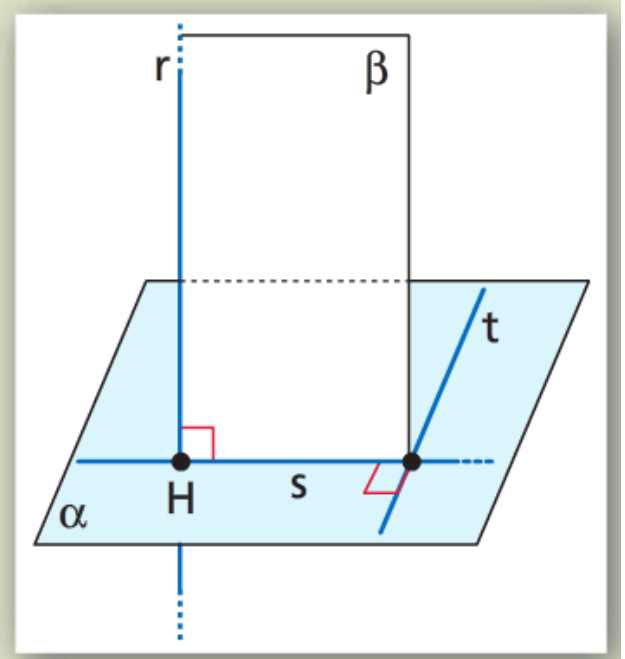


Il teorema delle tre perpendicolari

TEOREMA

Teorema delle tre perpendicolari

Se dal piede di una perpendicolare a un piano si manda la perpendicolare a una qualunque retta del piano, quest'ultima risulta perpendicolare al piano delle prime due.



Ipotesi 1. $r \perp \alpha$;
2. $s \perp t$.

Tesi $t \perp \beta$.

La distanza di un punto da un piano

Se da un punto P mandiamo la perpendicolare a un piano α, l'intersezione P' della retta con il piano è la **proiezione ortogonale** di P su α. Se proiettiamo tutti i punti di una figura $\mathscr{F}$ sul piano α otteniamo la proiezione $\mathscr{F}'$ di $\mathscr{F}$. In particolare la proiezione di una retta su un piano è una retta.
È possibile dimostrare il seguente teorema.

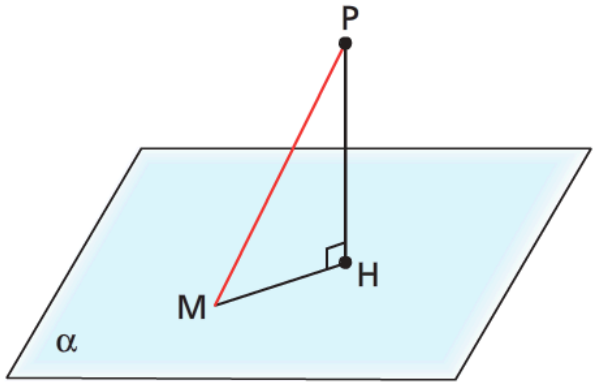
TEOREMA

Sia dato un piano α e un punto P non appartenente ad α:

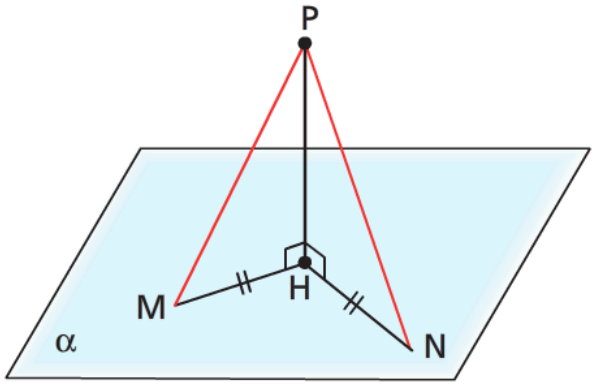
a) il segmento di perpendicolare condotto da P ad α è minore di ogni segmento obliquo;

b) due segmenti obliqui che hanno proiezioni congruenti sono congruenti e viceversa;

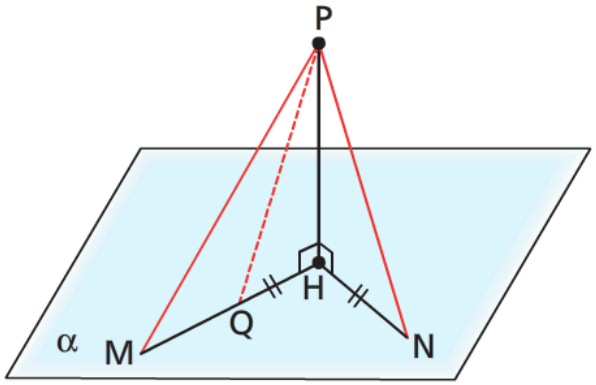
c) due segmenti obliqui che hanno proiezioni disuguali sono disuguali ed è maggiore quello la cui proiezione è maggiore e viceversa.



a. Ipotesi: $PH \perp \alpha$.
Tesi: $PM > PH$.



b. Ipotesi: $HM \cong HN$.
Tesi: $PM \cong PN$.

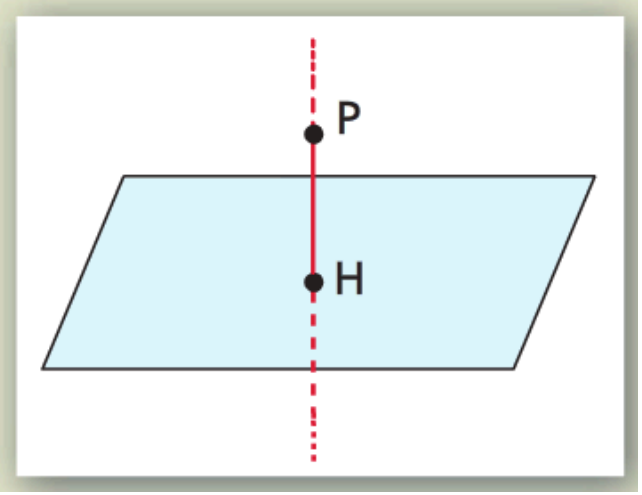


c. Ipotesi: $HM > HN$.
Tesi: $PM > PN$.

DEFINIZIONE

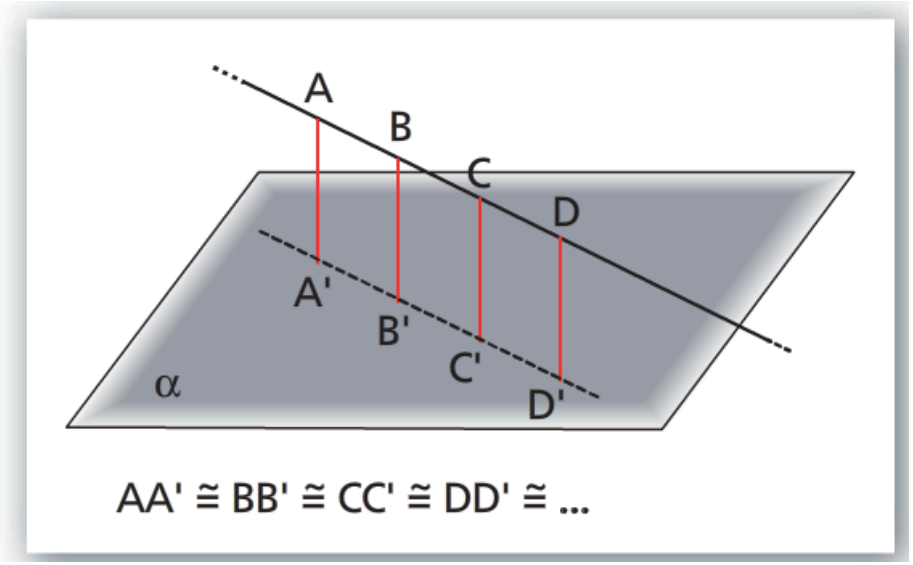
Distanza di un punto da un piano

Dati un piano e un punto, la distanza del punto dal piano è la lunghezza del segmento che ha per estremi il punto e il piede della perpendicolare al piano passante per il punto.



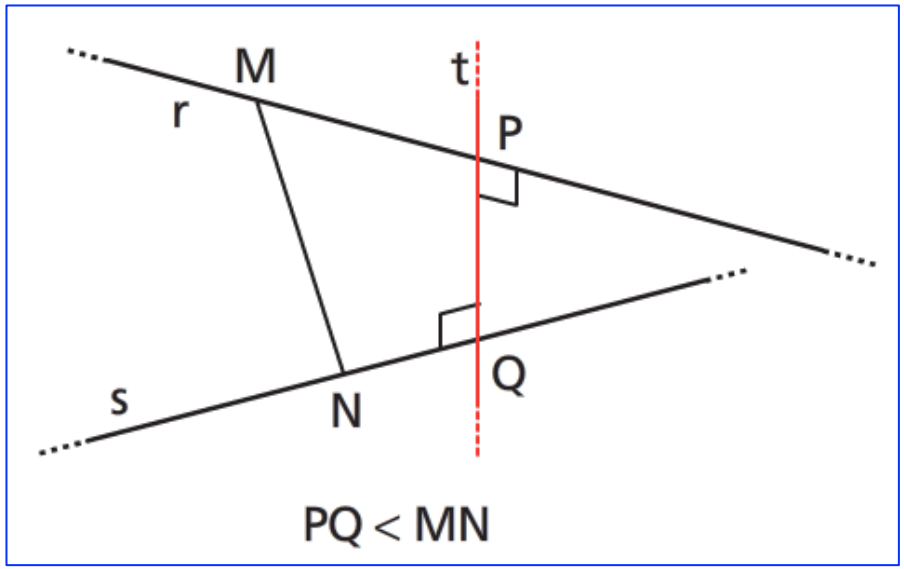
Distanza fra retta e piano paralleli

Se una retta è parallela a un piano, i suoi punti sono *equidistanti* dal piano stesso: tale distanza si chiama **distanza della retta dal piano**.

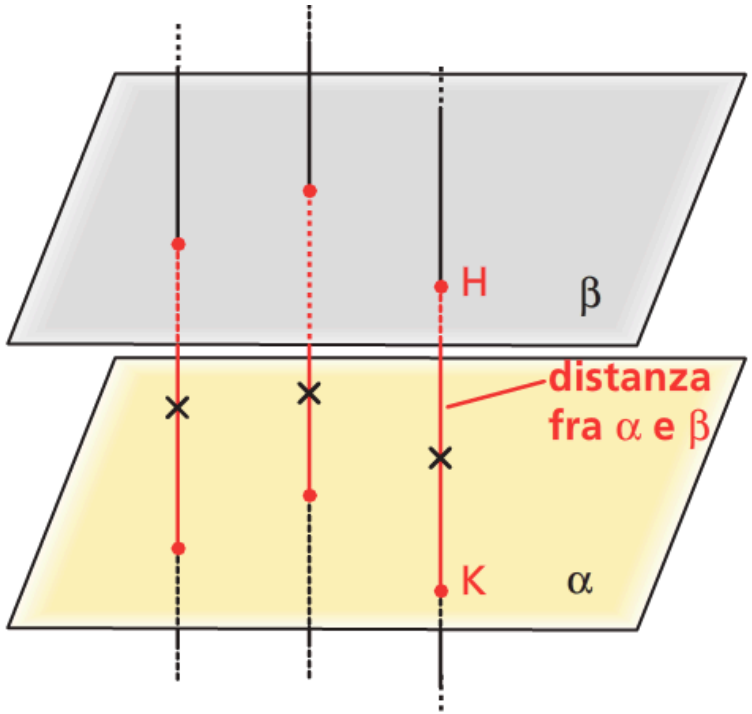


Distanza di due rette sghembe

Date due rette sghembe, si può dimostrare che esiste un'*unica retta perpendicolare* a entrambe. Il segmento che congiunge i due punti di intersezione di tale perpendicolare con le rette è minore di ogni altro segmento che congiunge un punto di una retta con un punto dell'altra. Tale segmento è detto **distanza fra le due rette sghembe**.



La distanza fra due piani paralleli



Dati due piani paralleli, si può dimostrare che una retta perpendicolare a uno di essi è perpendicolare anche all'altro. Inoltre, scelte due rette perpendicolari a due piani paralleli, il segmento intercettato dai due piani sull'una è congruente a quello intercettato sull'altra. Definiamo allora come **distanza fra due piani paralleli** la lunghezza del segmento intercettato dai due piani su una qualunque retta a essi perpendicolare.

● In generale è vero che, dati due piani paralleli e due rette parallele che li intersecano, i segmenti paralleli appartenenti alle rette e compresi fra i piani sono congruenti.

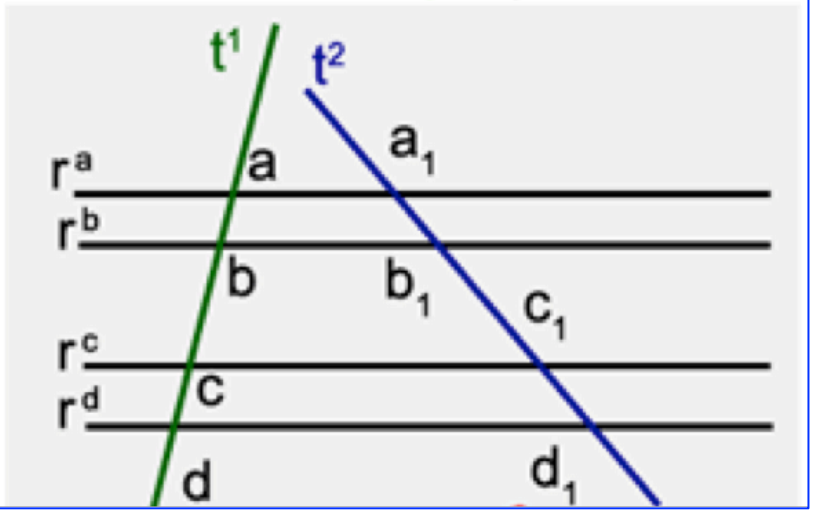
Il teorema di Talete nello spazio

Il teorema di Talete visto nel piano si può generalizzare nello spazio al caso di un insieme di piani paralleli e due rette **trasversali**, cioè due rette non parallele ai piani che quindi li intersecano tutti.

Teorema di Talete nel piano

Il teorema di Talete dice che
il rapporto tra i segmenti omologhi
su una e sull'altra retta
è costante

$$\frac{ab}{a_1b_1} = \frac{bc}{b_1c_1} = \frac{cd}{c_1d_1} = \frac{ad}{a_1d_1}$$



TEOREMA

Teorema di Talete nello spazio

Un fascio di piani paralleli intersecati da due trasversali intercetta su di esse segmenti corrispondenti proporzionali.

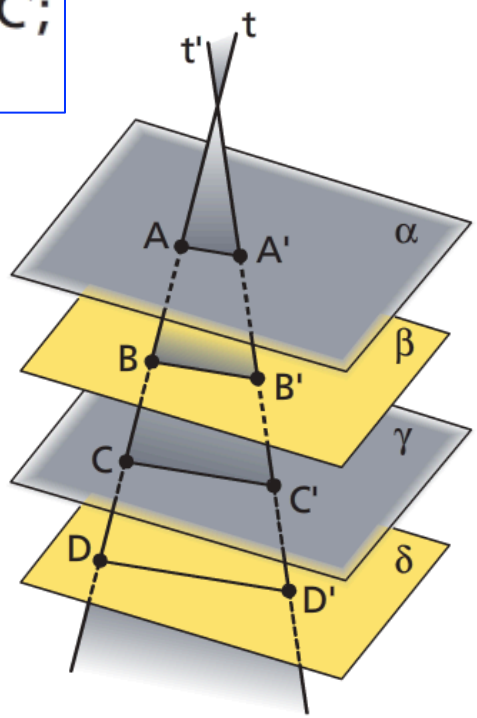
Ipotesi 1. $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma \parallel \ldots$;
2. t, t′ trasversali.

Tesi $AB : BC = A'B' : B'C'$;
$AC : BC = A'C' : B'C'$;
…

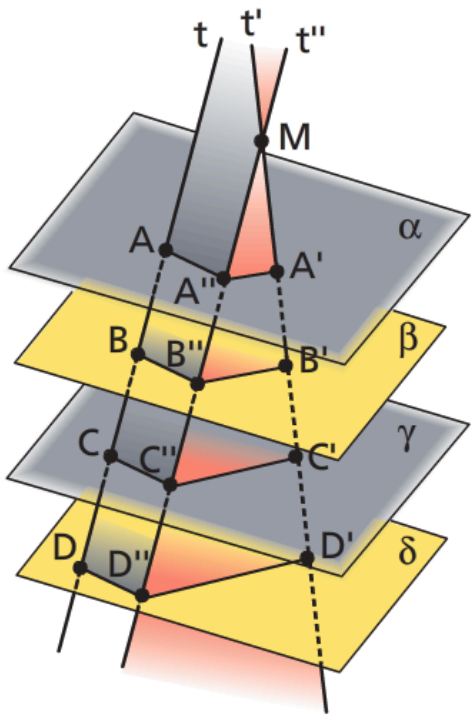
- Un insieme di piani paralleli si chiama **fascio improprio** di piani.

Un insieme di piani che hanno in comune una stessa retta *r* si chiama **fascio proprio** di asse *r*.

Si possono presentare due casi.



a. Le trasversali sono complanari.



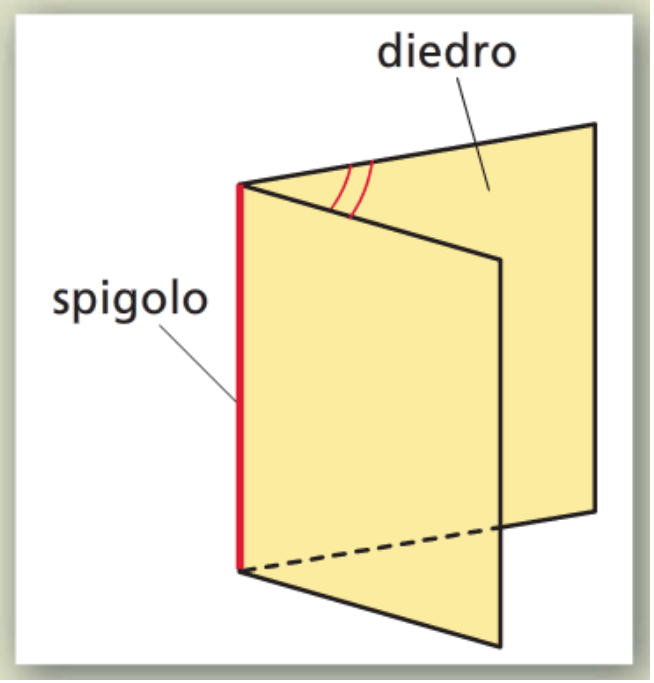
b. Le trasversali sono sghembe.

I diedri e i piani perpendicolari

DEFINIZIONE

Diedro

Dati nello spazio due semipiani aventi la stessa retta origine, chiamiamo **diedro** ognuna delle due parti (compresi i semipiani) in cui essi dividono lo spazio.

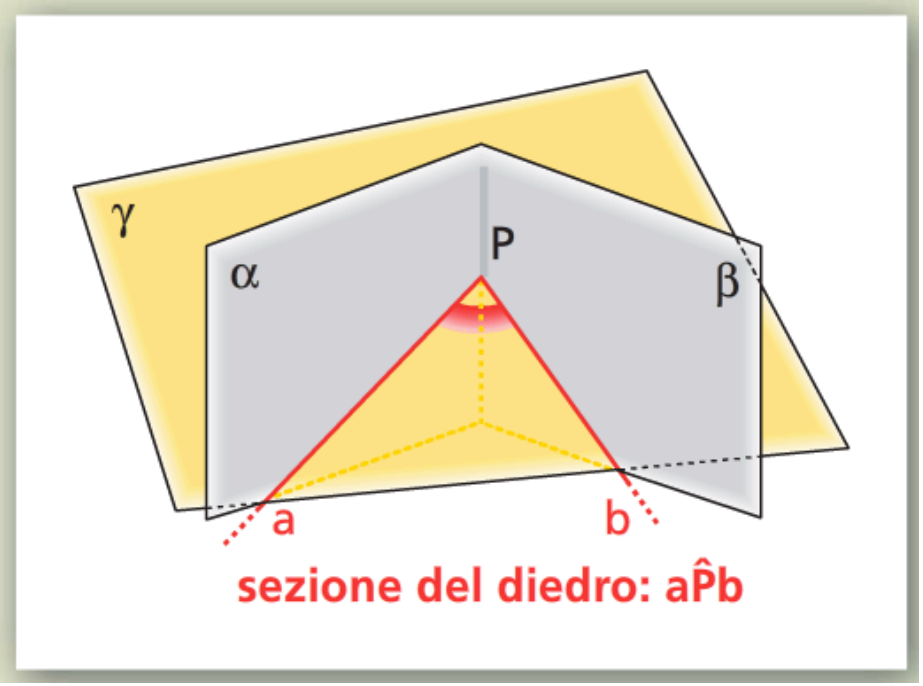


La retta origine dei semipiani si chiama **spigolo** del diedro e i semipiani si chiamano **facce** del diedro.

DEFINIZIONE

Sezione di un diedro

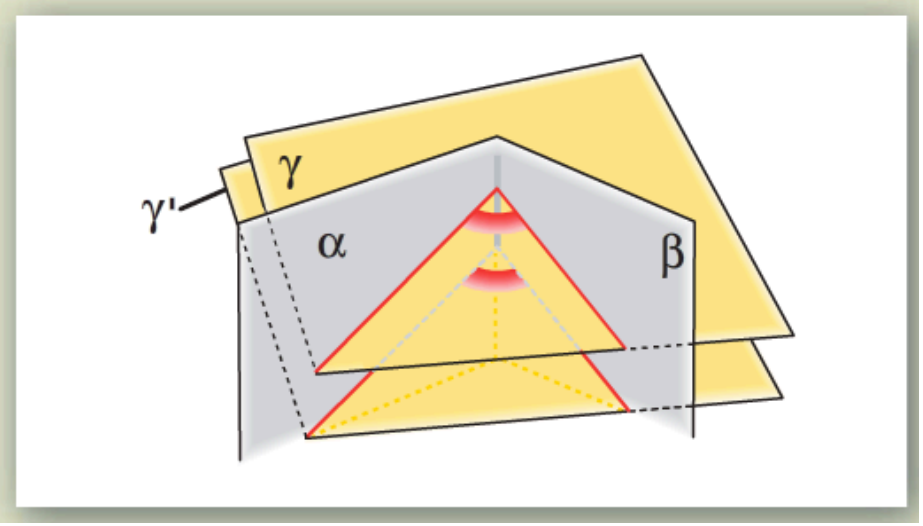
Si chiama sezione di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano non parallelo allo spigolo che interseca il suo spigolo.



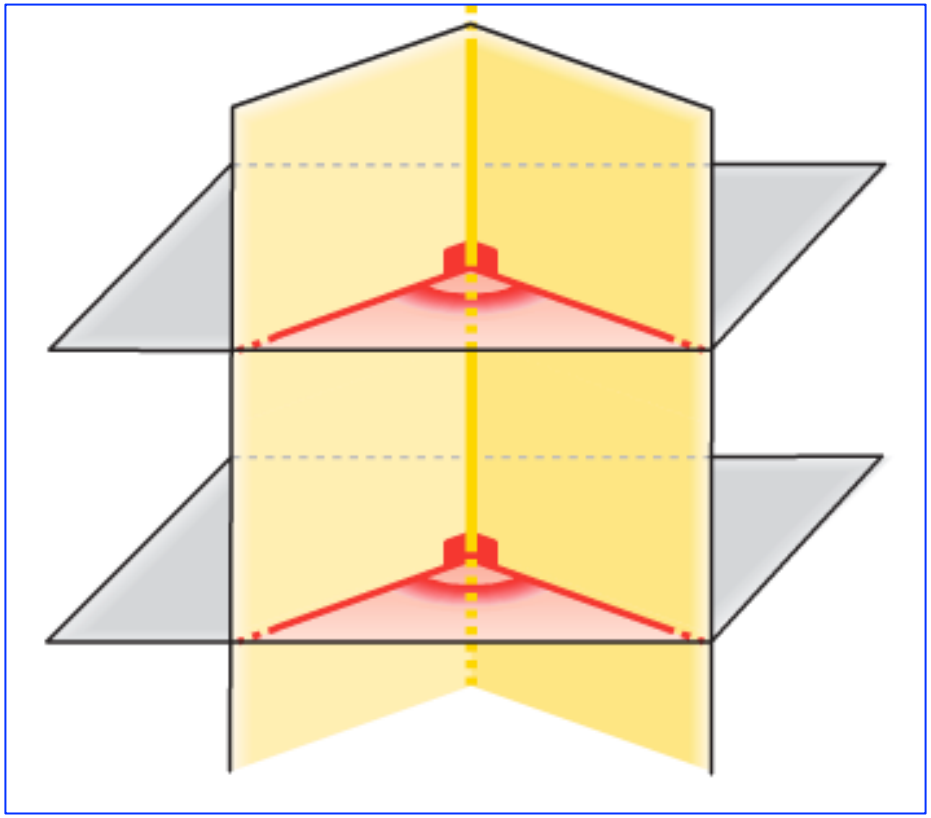
TEOREMA

Sezioni parallele di uno stesso diedro sono congruenti.

Ipotesi	$\gamma \parallel \gamma'$.
Tesi	$A\widehat{C}B \cong A'\widehat{C}'B'$

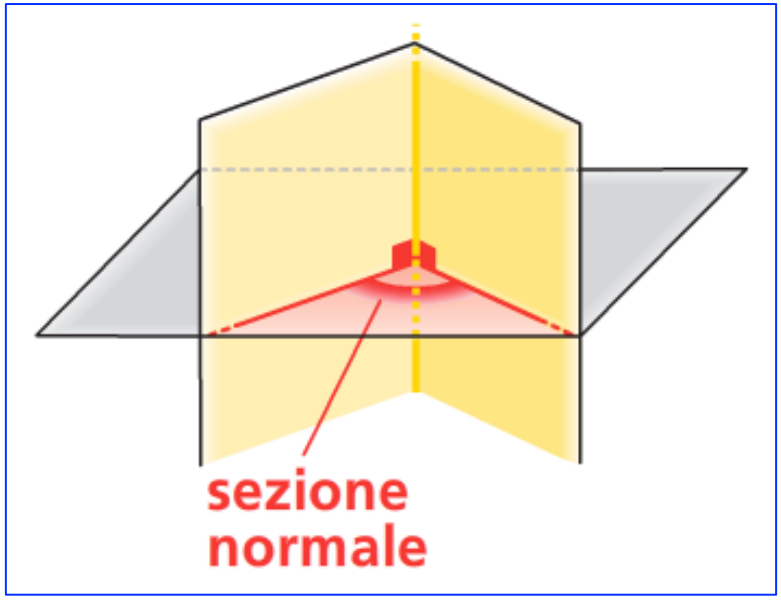


Una conseguenza del teorema precedente è che, se intersechiamo un diedro con piani perpendicolari allo spigolo, gli angoli che otteniamo sui piani sono congruenti fra loro (figura a lato).



Chiamiamo allora **sezione normale** di un diedro l'angolo che si ottiene come intersezione fra il diedro e un qualunque piano perpendicolare al suo spigolo.

Due diedri sono congruenti se sono congruenti le loro sezioni normali.



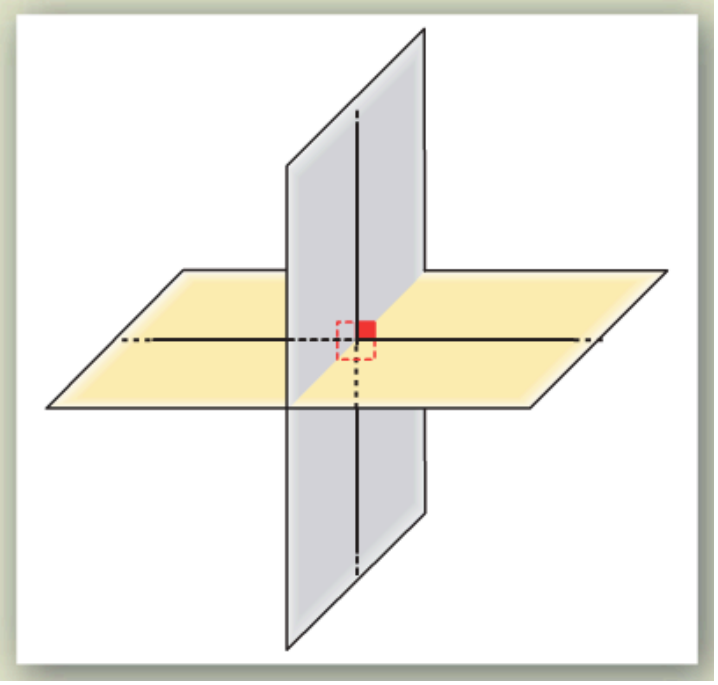
Chiamiamo **ampiezza** di un diedro l'ampiezza della sua sezione normale; un diedro si dice **retto**, **acuto** o **ottuso** a seconda che la sua sezione normale sia un angolo retto, acuto o ottuso.

Possiamo ora dare nello spazio la definizione di piani perpendicolari, analoga alla definizione di rette perpendicolari nel piano.

DEFINIZIONE

Piani perpendicolari

Due piani incidenti sono perpendicolari quando dividono lo spazio in quattro diedri retti.



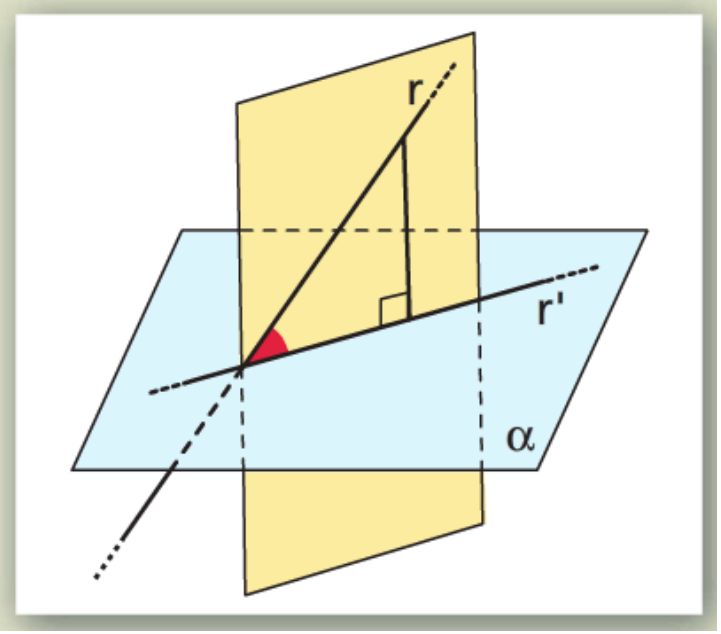
L'angolo di una retta con un piano

Sia r una retta incidente il piano α: un piano generico, che passa per r, interseca α in un'altra retta. L'angolo formato dalle due rette dipende dalla scelta del piano variabile e risulta minimo quando il piano è perpendicolare ad α.

DEFINIZIONE

Angolo di una retta con un piano

L'angolo di una retta r con un piano α è l'angolo formato da r e dalla sua proiezione r' su α.

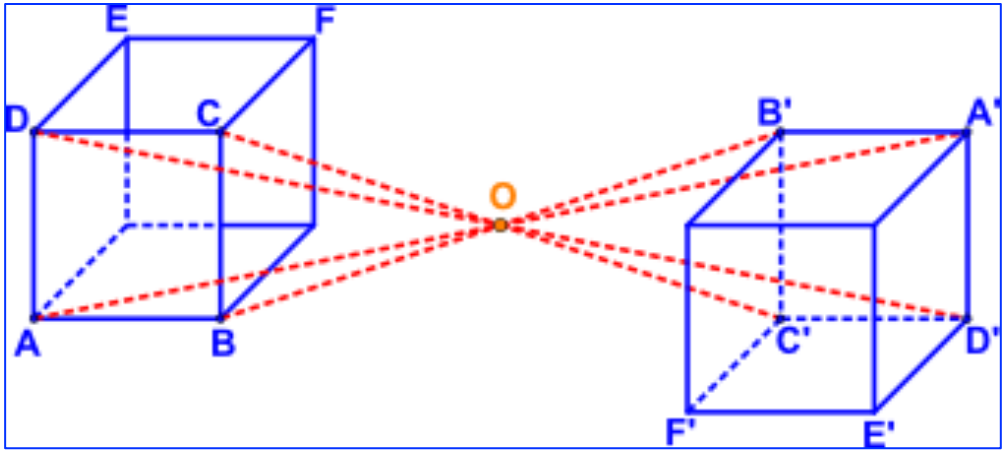


Le trasformazioni geometriche

Per lo studio delle trasformazioni geometriche nello spazio il percorso è analogo a quello seguito nel piano e molti concetti non sono altro che la traduzione in tre dimensioni di quelli introdotti precedentemente.

DEFINIZIONE

Una **trasformazione geometrica** nello spazio è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto dello spazio uno e un solo punto dello spazio stesso.



Esaminiamo, come abbiamo fatto nel piano, le isometrie e le omotetie; fra le composizioni di trasformazioni studiamo invece le similitudini.

Le isometrie

Le isometrie nello spazio hanno le stesse proprietà di quelle del piano, ossia **conservano le distanze tra coppie di punti corrispondenti**. Esse trasformano ogni segmento in un segmento congruente e ogni angolo in un angolo congruente.

DEFINIZIONE

Figure solide congruenti

Due figure solide si dicono **congruenti** quando hanno tutte le caratteristiche tra loro congruenti, ossia hanno lati, angoli, spigoli, facce, diedri corrispondenti congruenti. Se inoltre possono essere sovrapposte, mediante un movimento rigido, in modo che tutti i loro punti coincidano, si dicono **direttamente congruenti**. In caso contrario si dicono **inversamente congruenti**.

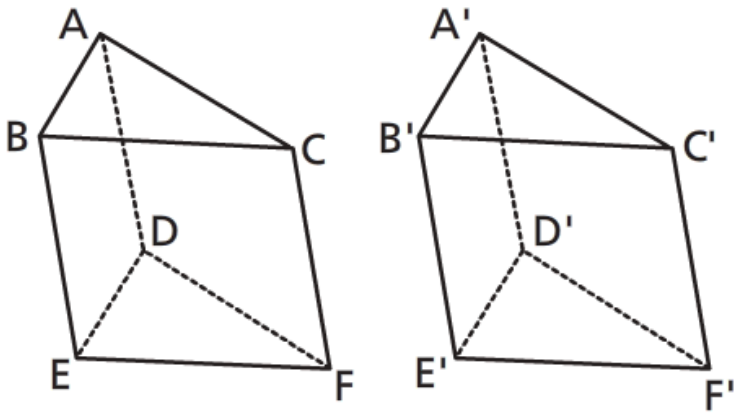


Figure direttamente congruenti

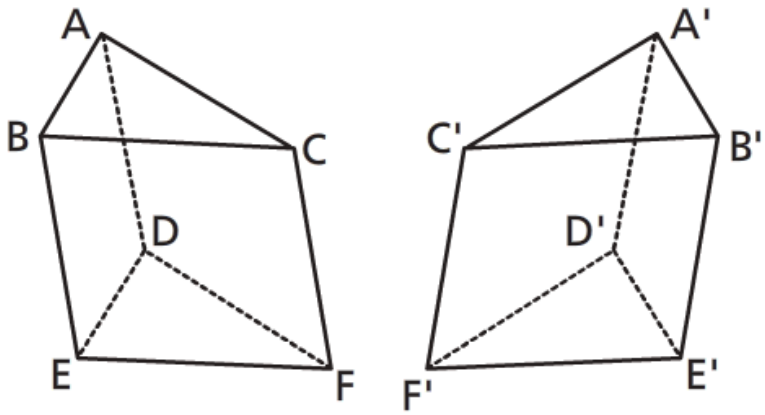
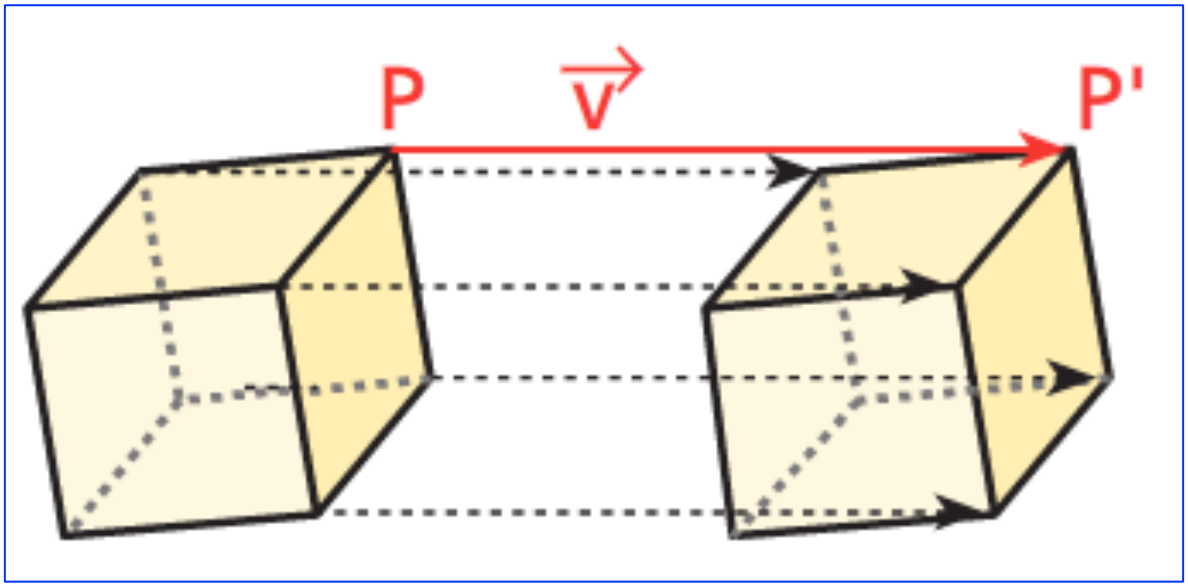


Figure inversamente congruenti

La traslazione

Fissato nello spazio un vettore $\vec{v}$, la **traslazione di vettore $\vec{v}$** è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che il vettore $\overrightarrow{PP'}$ è uguale a $\vec{v}$.

In una traslazione, la figura trasformata è direttamente congruente alla figura data.

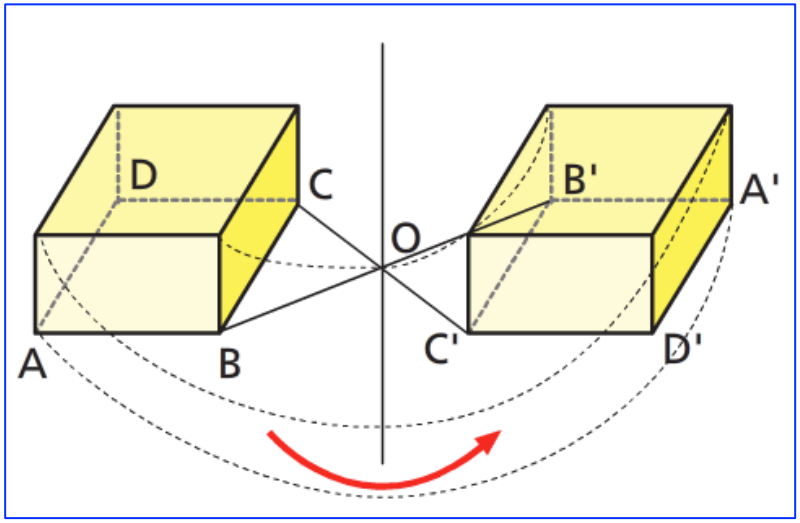


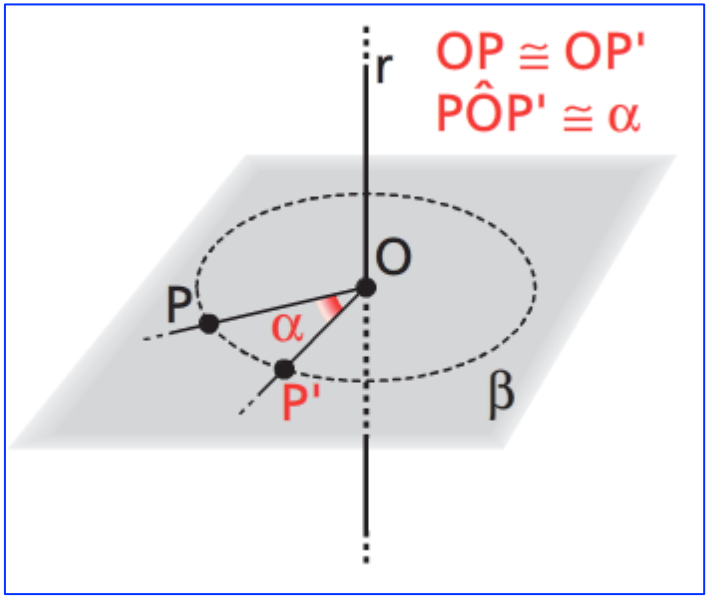
La rotazione

Fissati nello spazio una retta r e un angolo orientato α, la **rotazione di asse r e angolo α** è quella trasformazione geometrica che a ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

- P' appartiene al piano β passante per P e perpendicolare alla retta r;
- chiamato O il punto di intersezione di r con β, $OP' \cong OP$ e $P\widehat{O}P' \cong \alpha$, con la stessa orientazione.

In una rotazione, la figura trasformata è direttamente congruente alla figura data.





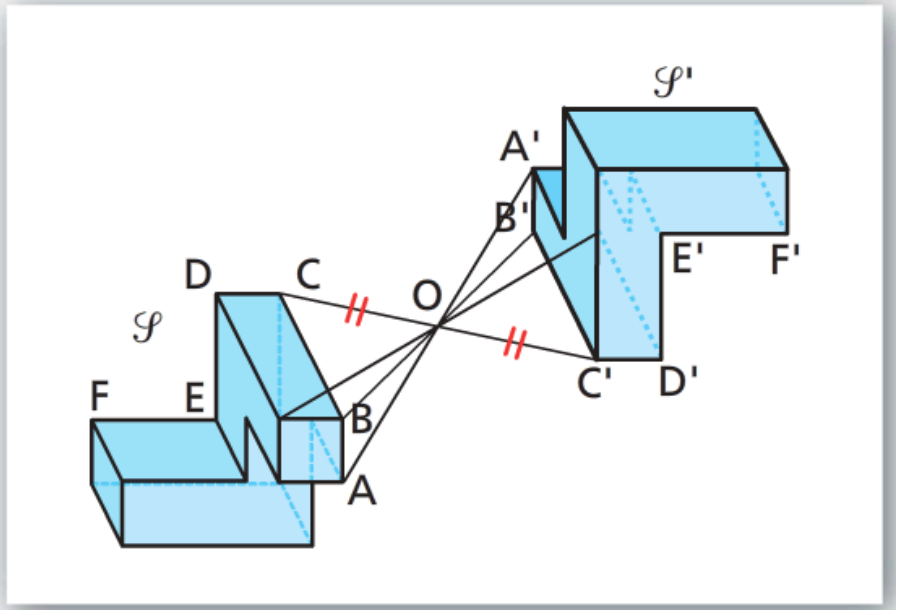
● Ogni punto dell'asse r di rotazione è punto unito.

La simmetria centrale

Fissato nello spazio un punto O, la **simmetria centrale di centro O** è la trasformazione geometrica che:

1. al punto O fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P diverso da O fa corrispondere il punto P' tale che il segmento PP' abbia O come punto medio.

Due solidi che si corrispondono mediante una simmetria centrale di centro O sono, in genere, inversamente congruenti.

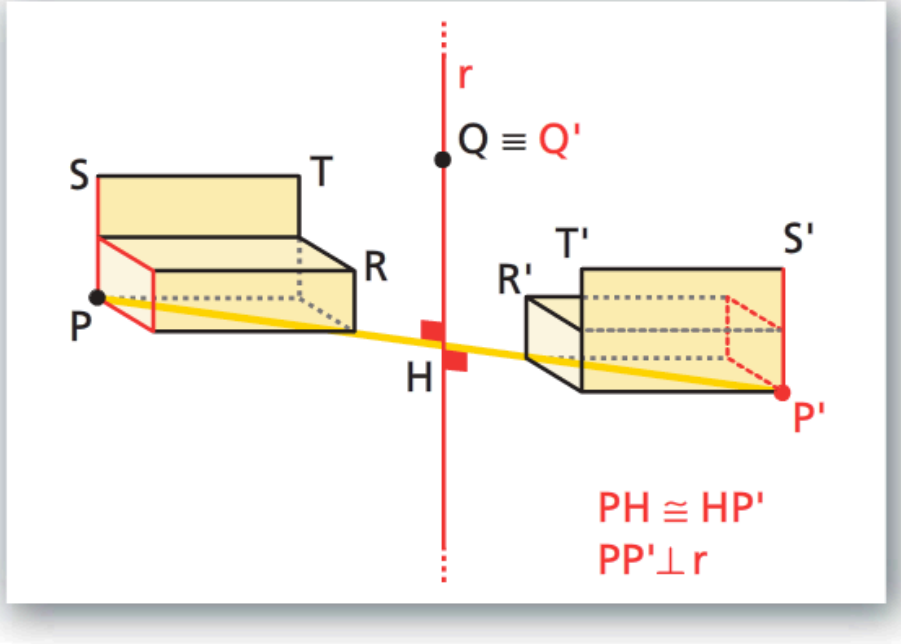


● Il punto O di una simmetria centrale di centro O è un punto unito.

La simmetria assiale

Fissata una retta r nello spazio, la **simmetria assiale di asse r** è la trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di r fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente a r, fa corrispondere il punto P', diverso da P, tale che:
   - la retta PP' è perpendicolare a r;
   - le distanze di P e di P' da r sono congruenti.



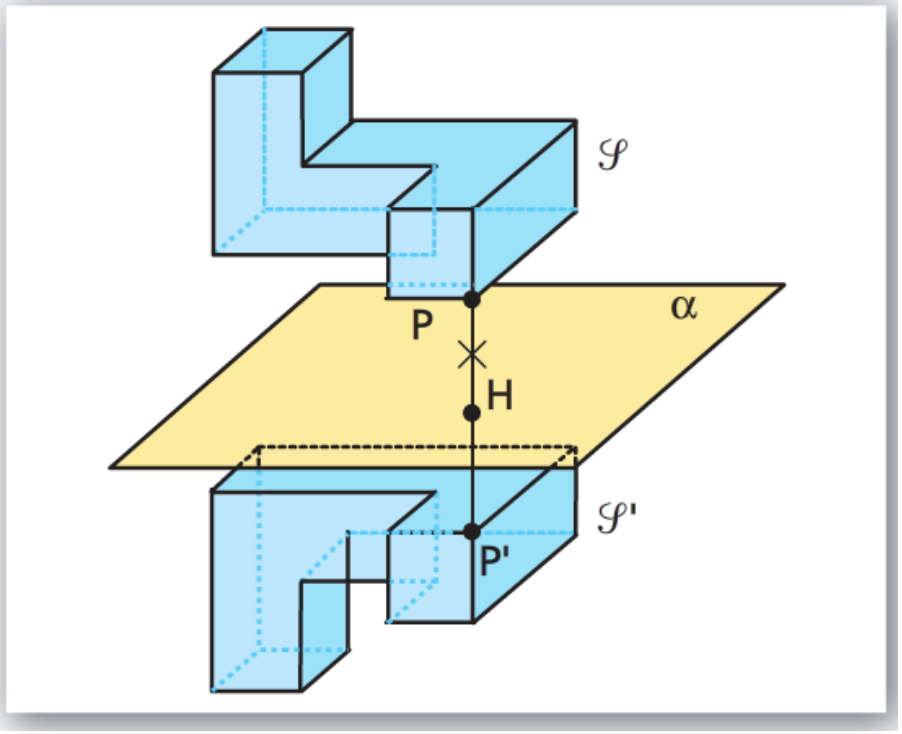
La figura trasformata in una simmetria assiale è direttamente congruente alla data.

In una simmetria assiale di asse r, i punti di r sono punti uniti.

La simmetria rispetto a un piano

Fissato un piano α nello spazio, la **simmetria rispetto al piano** α è quella trasformazione geometrica che:

1. a ogni punto di α fa corrispondere se stesso;
2. a ogni punto P, non appartenente ad α, fa corrispondere il punto P', diverso da P, tale che:
   - la retta PP' è perpendicolare ad α;
   - le distanze di P e P' da α sono congruenti.



Il piano α è chiamato **piano di simmetria**.

Due figure solide che si corrispondono mediante una simmetria rispetto a un piano sono, in genere, inversamente congruenti.

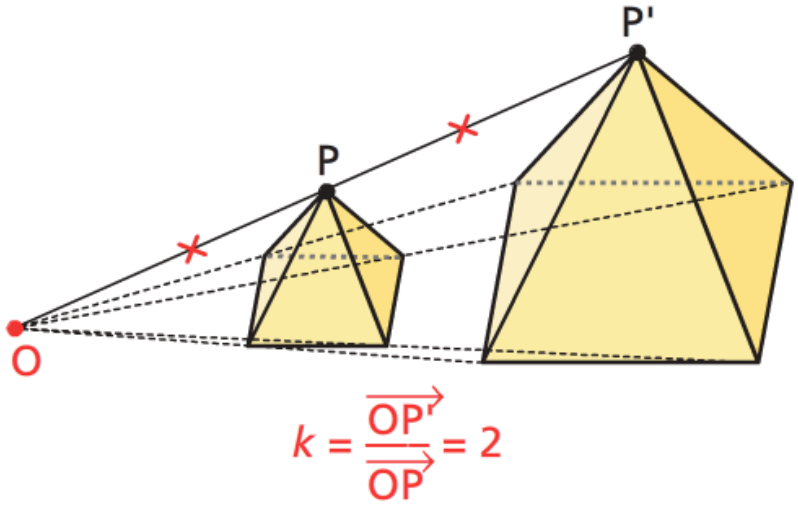
● In una simmetria rispetto a un piano ogni punto del piano è punto unito.

Le omotetie

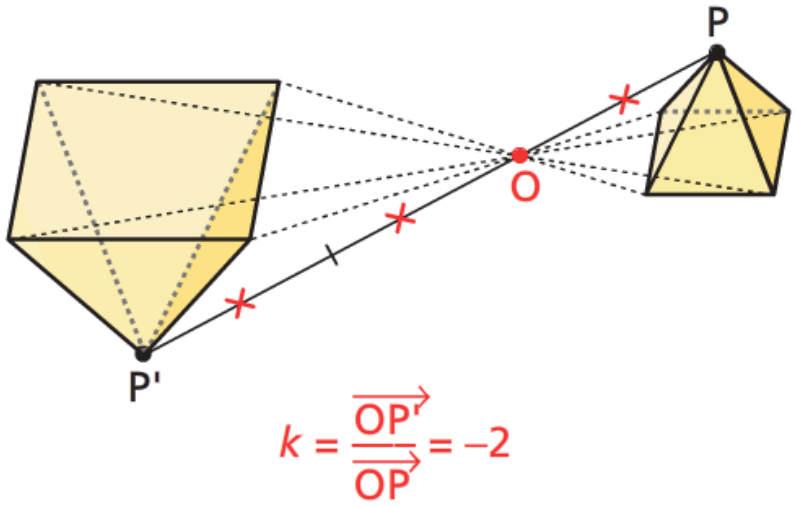
Dato un punto O e un numero reale k diverso da 0, l'**omotetia di centro O** e **rapporto k** è quella trasformazione che al punto O fa corrispondere se stesso e a ogni altro punto P fa corrispondere il punto P' tale che:

$$\frac{\overrightarrow{OP'}}{\overrightarrow{OP}} = k.$$

Come nel piano, il numero reale k è detto *rapporto di omotetia*. Se $k > 0$ l'omotetia si dice *diretta*, se $k < 0$ si dice *inversa*.



a. Omotetia diretta: $k = 2$.



b. Omotetia inversa: $k = -2$.

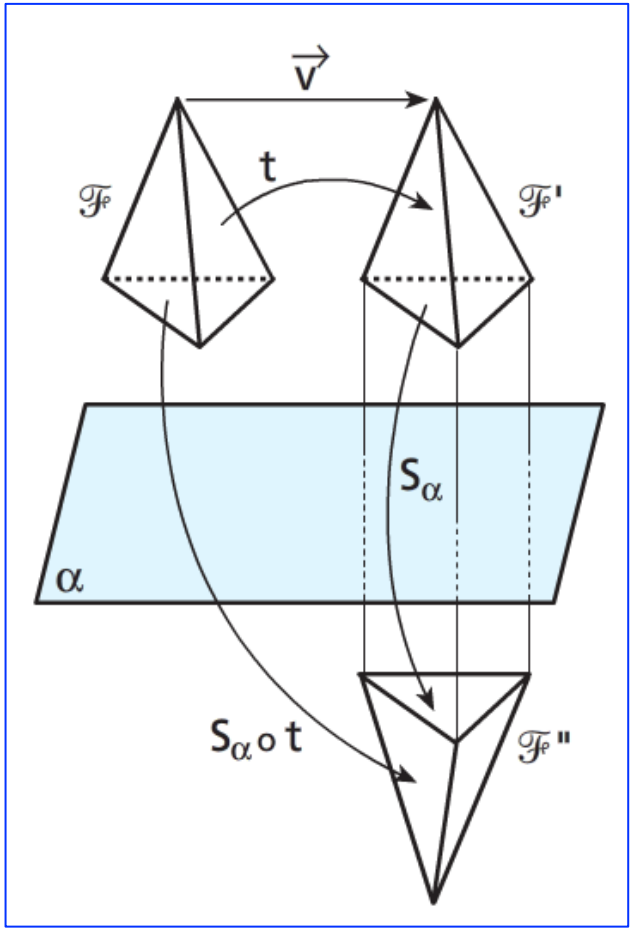
La composizione di due trasformazioni

È possibile comporre due trasformazioni geometriche anche nello spazio. Per esempio, applichiamo a un solido $\mathscr{F}$ una trasformazione t_1 e al solido corrispondente $\mathscr{F}'$ una trasformazione t_2. Per ottenere direttamente il solido $\mathscr{F}''$ dobbiamo applicare a $\mathscr{F}$ la trasformazione composta $t_2 \circ t_1$:

$$\mathscr{F} \overset{t_2 \circ t_1}{\longmapsto} \mathscr{F}''.$$

ESEMPIO

Trasliamo la figura $\mathscr{F}$ secondo un vettore $\vec{v}$, poi determiniamo il solido $\mathscr{F}''$, simmetrico di $\mathscr{F}'$ rispetto al piano α. La trasformazione composta associa a $\mathscr{F}$ il solido $\mathscr{F}''$.

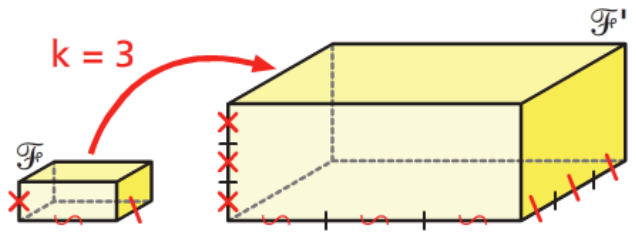


La similitudine

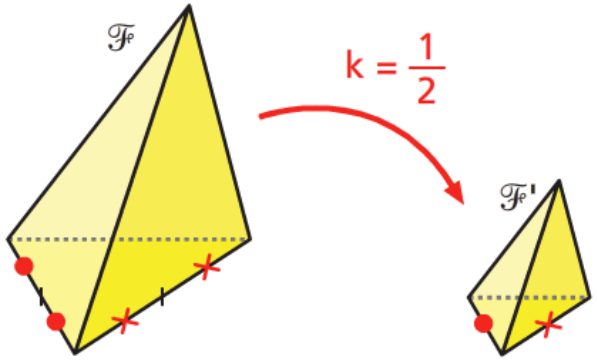
Nello spazio la similitudine viene definita in modo del tutto analogo alla similitudine nel piano, ossia una similitudine è la trasformazione composta di un'isometria e di un'omotetia, o viceversa. Il *rapporto di similitudine* è, anche in questo caso, il rapporto di omotetia.

La similitudine nello spazio gode di tutte le proprietà già esaminate nel piano, in particolare essa trasforma angoli in angoli congruenti e segmenti in segmenti proporzionali.

Il rapporto fra segmenti corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine.



a. Il rapporto di similitudine è 3. Ciò significa che ogni lato del solido $\mathcal{F}'$ è il triplo del corrispondente di $\mathcal{F}$.



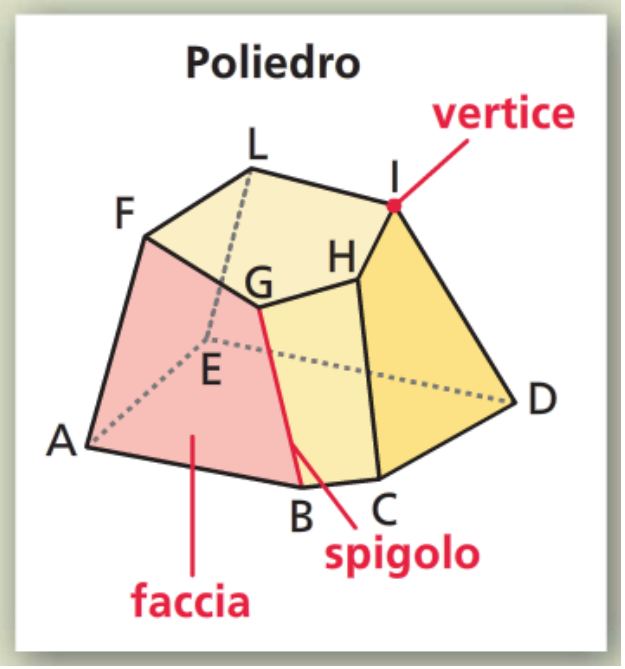
b. Il rapporto di similitudine è $\frac{1}{2}$. Ogni lato del solido $\mathcal{F}'$ è la metà del corrispondente di $\mathcal{F}$.

I poliedri

DEFINIZIONE

Poliedro

Un poliedro è una figura solida, limitata da un numero finito di poligoni appartenenti a piani diversi e tali che il piano di ogni poligono non attraversi il solido.



I poligoni sono detti **facce** del poliedro, i lati dei poligoni **spigoli** del poliedro, i vertici dei poligoni **vertici** del poliedro.

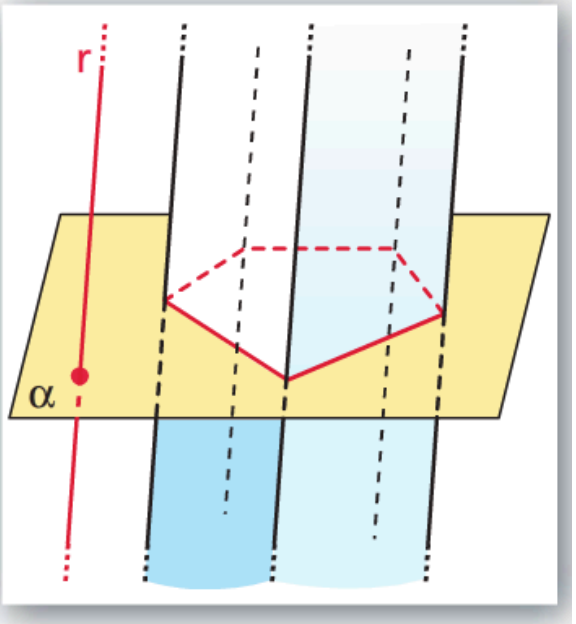
Si dice **diagonale** di un poliedro il segmento che congiunge due vertici non situati sulla stessa faccia.

Un poliedro ha almeno quattro facce. Il tetraedro è il poliedro a quattro facce. **Pentaedro**, **esaedro**, **ottaedro**, **dodecaedro** sono poliedri che hanno rispettivamente 5, 6, 8, 12 facce.

Descriviamo ora le principali proprietà di due poliedri: il prisma e la piramide.

Il prisma

Dati un poligono e una retta r non appartenente al piano del poligono, la figura costituita dall'insieme delle rette parallele a r e passanti per i punti del poligono si chiama **prisma indefinito**.
Le rette parallele a r passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** del prisma indefinito.

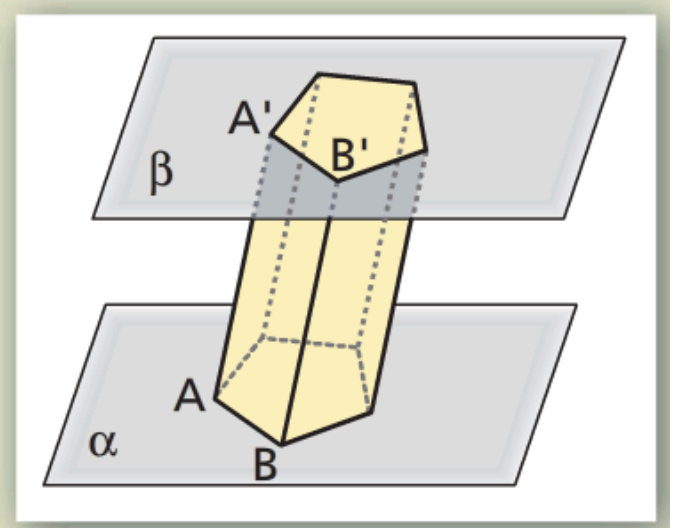


► Figura 24

DEFINIZIONE

Prisma (definito)

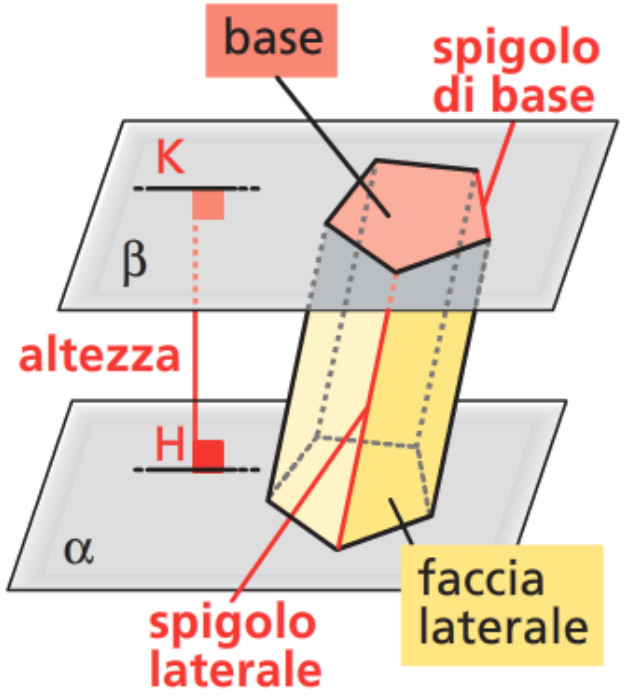
Si chiama prisma definito, o semplicemente prisma, il poliedro costituito dalla parte di prisma indefinito compresa fra due piani paralleli che lo intersecano.



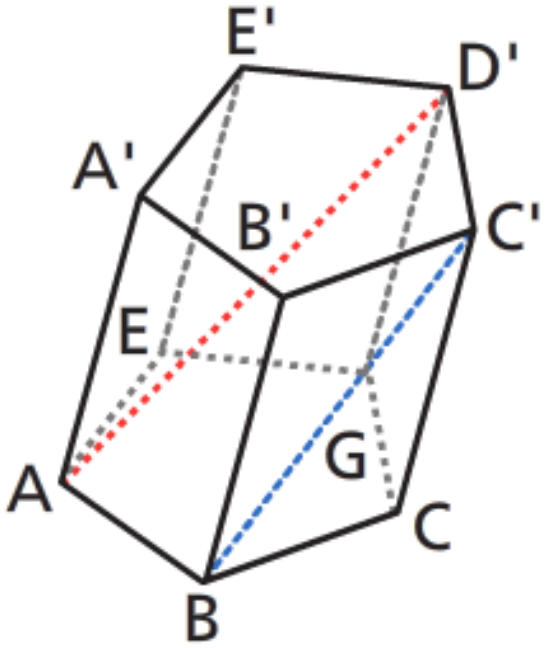
Le intersezioni fra i piani paralleli e il prisma indefinito sono dette **basi** del prisma. Gli altri poligoni che delimitano il prisma sono detti **facce laterali** e sono tanti parallelogrammi quanti sono i lati dei poligoni di base.

I prismi possono essere classificati mediante i poligoni di base. Se la base è un esagono, il prisma si dice esagonale; se è un triangolo, triangolare e così via.

La distanza fra i due piani paralleli è l'**altezza** del prisma. Ogni lato di base si chiama anche **spigolo di base**, gli altri lati dei parallelogrammi si chiamano **spigoli laterali**. I vertici dei poligoni vengono anche detti **vertici** del prisma.



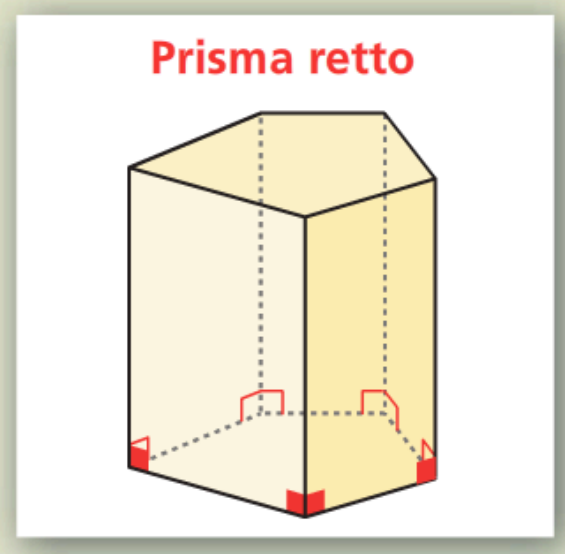
Le **diagonali** di un prisma sono quei segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia. Nella figura a lato, AD' è una diagonale del prisma. Un prisma triangolare non ha diagonali.



DEFINIZIONE

Prisma retto

Un prisma si dice retto se gli spigoli laterali sono perpendicolari ai piani delle basi.



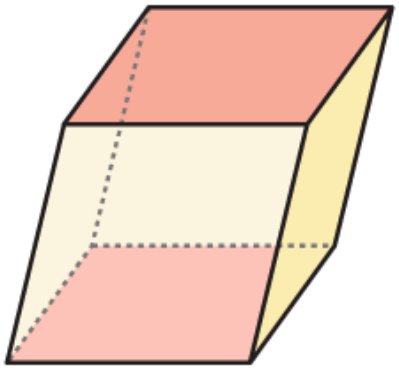
In un prisma retto le facce laterali sono dei rettangoli e l'altezza coincide con gli spigoli laterali.

Un prisma retto si dice **regolare** quando le sue basi sono poligoni regolari.

DEFINIZIONE

Parallelepipedo

Un parallelepipedo è un prisma le cui basi sono parallelogrammi.



Parallelepipedo

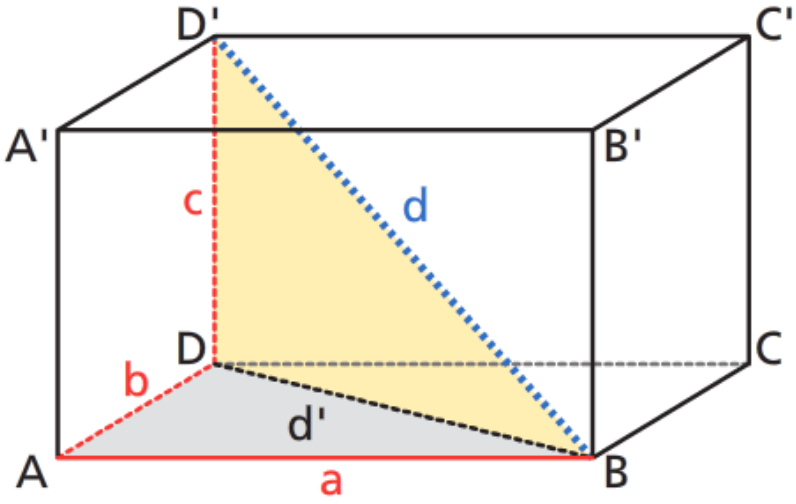
TEOREMA

Le facce opposte di un parallelepipedo, ossia quelle che non hanno vertici in comune, sono congruenti e parallele.

TEOREMA

Le diagonali di un parallelepipedo si incontrano in uno stesso punto che le divide in due segmenti congruenti.

Un parallelepipedo retto in cui le basi sono rettangoli si chiama **parallelepipedo rettangolo**.



► **Figura 26** Con *a*, *b* e *c* indichiamo le misure delle dimensioni del parallelepipedo rettangolo, con *d* quella della diagonale, con *d'* quella della diagonale di base.

In un parallelepipedo rettangolo le diagonali sono congruenti. La relazione fra la loro misura e quella delle tre dimensioni del parallelepipedo si ottiene applicando due volte il teorema di Pitagora. Osserviamo la figura 26: applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABD si ottiene

$$d'^2 = a^2 + b^2$$

e, applicando il teorema di Pitagora al triangolo DBD':

$$d^2 = d'^2 + c^2.$$

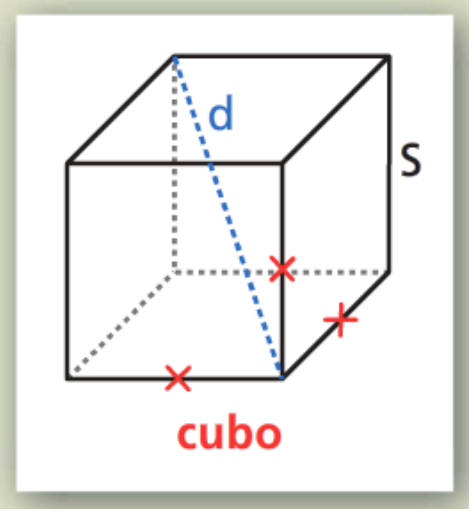
Sostituendo l'espressione di d'^2 ottenuta prima, si ricava:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \rightarrow \boldsymbol{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

DEFINIZIONE

Cubo

Un cubo è un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni congruenti.



Le sei facce del cubo sono quadrati congruenti. Detta s la misura dello spigolo del cubo, abbiamo:

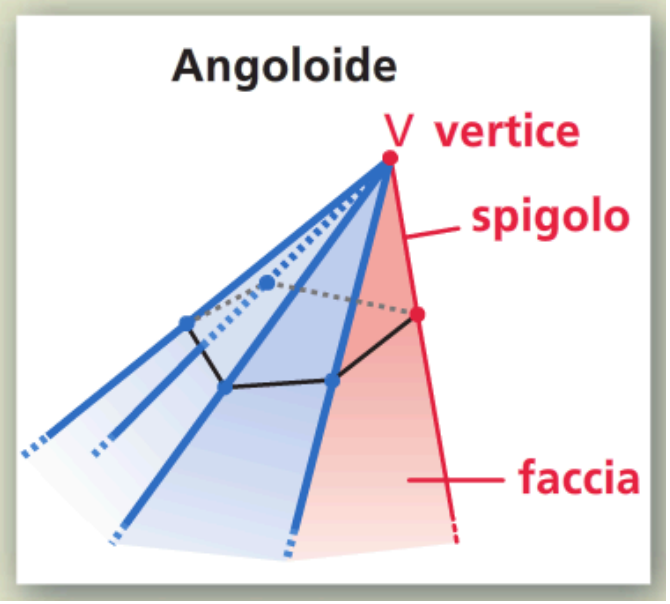
$$d = s\sqrt{3}\,.$$

L'angoloide e il triedro

DEFINIZIONE

Angoloide

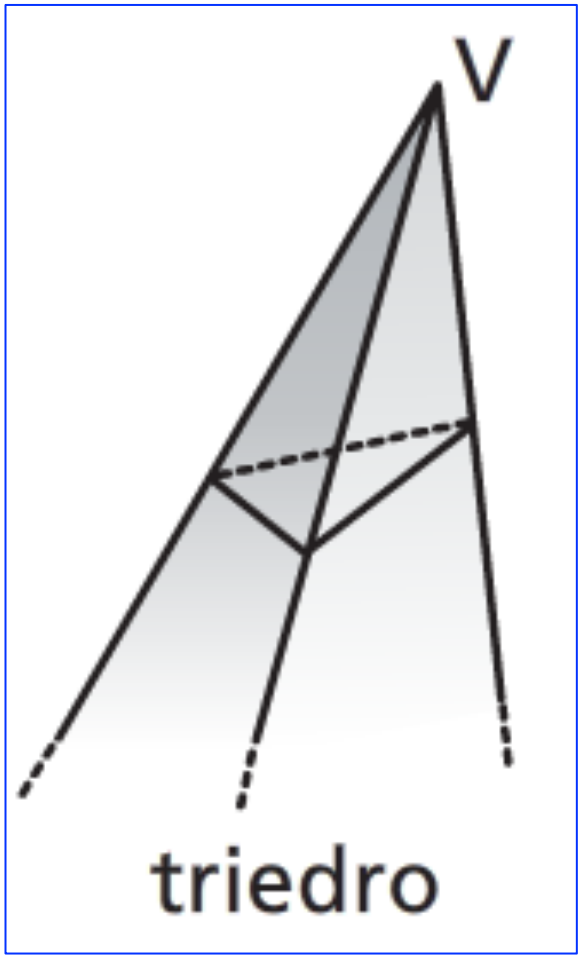
Consideriamo un poligono convesso e un punto V non appartenente al suo piano. Chiamiamo angoloide il solido costituito da tutte le semirette di origine V che passano per i punti del poligono.



Le semirette passanti per i vertici del poligono sono dette **spigoli** dell'angoloide, l'origine V è il **vertice** dell'angoloide, gli angoli di vertice V e lati due spigoli consecutivi sono le **facce** dell'angoloide.

In particolare, un angoloide con tre spigoli si chiama **triedro** (figura a lato).

Gli angoloidi sono figure convesse.



TEOREMA

In ogni angoloide di vertice V, la somma degli angoli in V delle facce è minore di un angolo giro.

TEOREMA

In ogni *angoloide* l'angolo di una faccia è minore della somma degli angoli delle rimanenti.

TEOREMA

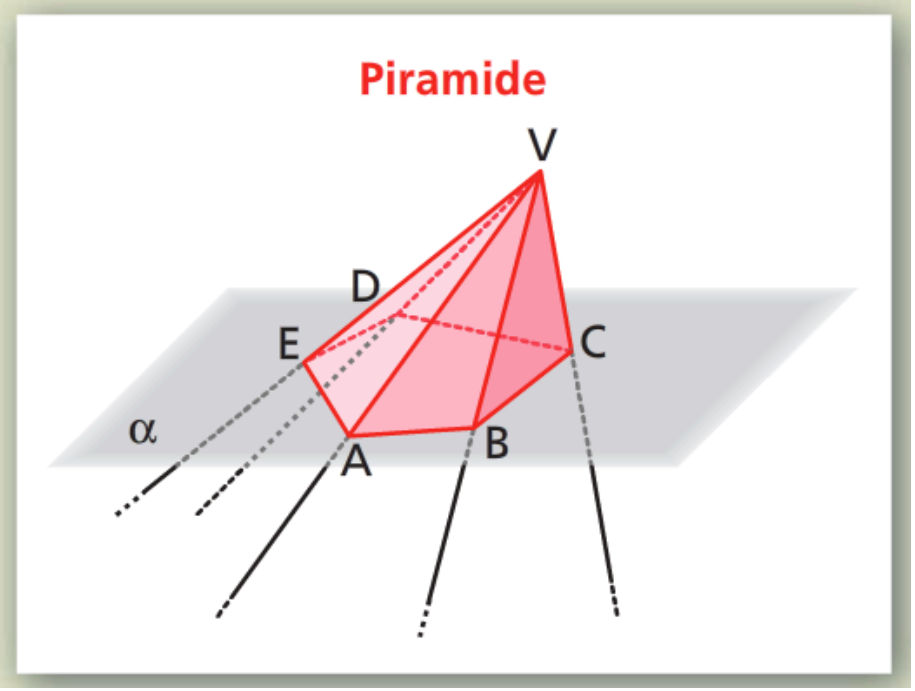
In ogni *triedro* l'angolo di una faccia è maggiore della differenza degli angoli delle altre due.

La piramide

DEFINIZIONE

Piramide

Si chiama piramide la parte di angoloide compresa fra il suo vertice e un piano che interseca tutti i suoi spigoli.



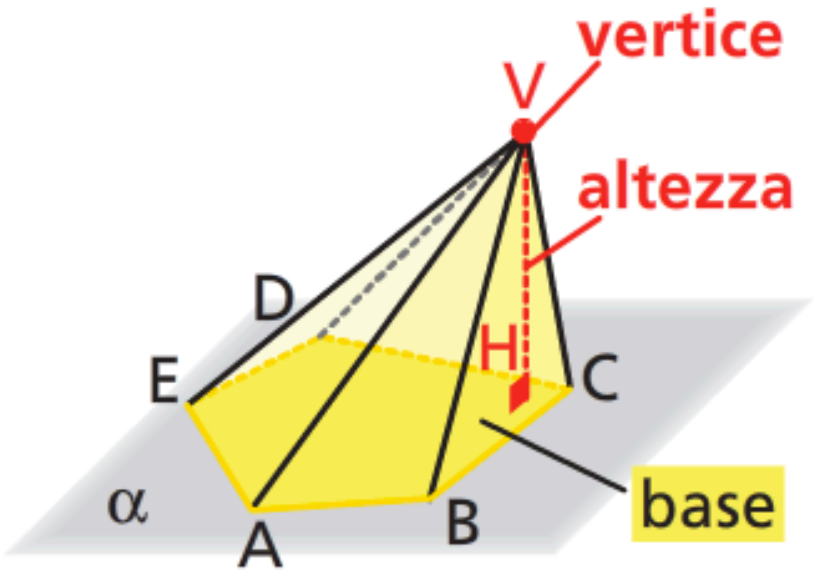
Il poligono intersezione fra il piano e l'angoloide si chiama **base** della piramide, il vertice dell'angoloide **vertice** della piramide.

La distanza fra il vertice e il piano di base è l'**altezza** della piramide.

La piramide è delimitata, oltre che dalla base, da triangoli detti **facce laterali**.

Ogni lato della base si chiama anche **spigolo** di base, gli altri lati dei triangoli si chiamano **spigoli laterali**.

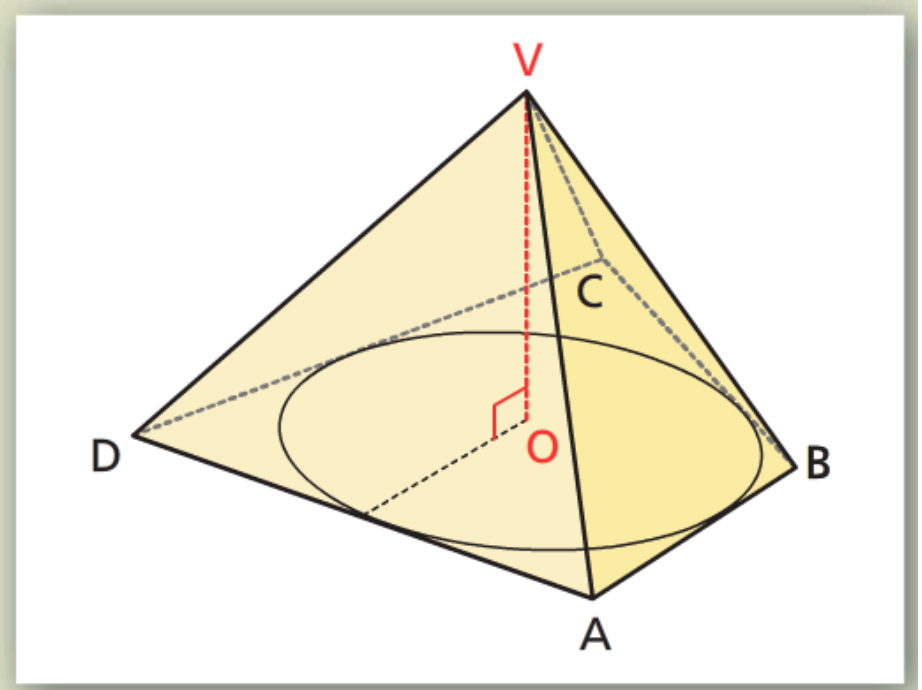
Anche le piramidi sono classificate mediante i poligoni di base. Se la base è un triangolo, la piramide si dice triangolare, se è un quadrilatero quadrangolare e così via.



DEFINIZIONE

Piramide retta

Una piramide è retta quando nella sua base si può inscrivere una circonferenza, il cui centro è la proiezione ortogonale del vertice della piramide sul piano di base.



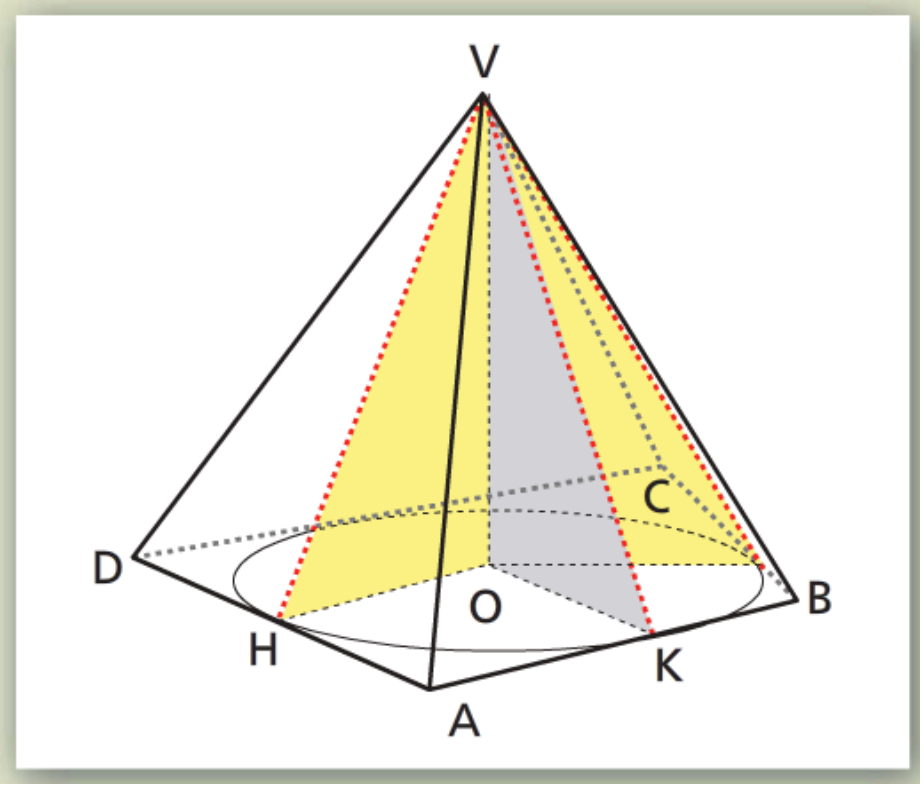
- Il centro O della circonferenza è la proiezione ortogonale del vertice V.
Osserva che il segmento VO è l'altezza della piramide.

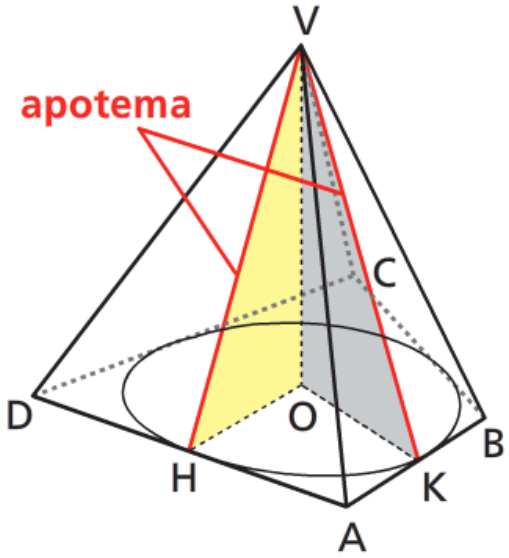
TEOREMA

In una piramide retta le altezze delle facce laterali passano per i punti di tangenza dei lati di base con la circonferenze inscritta e sono tra loro congruenti.

Ipotesi ABCDV è una piramide retta.

Tesi
1. $VK \perp AB$, $VH \perp AD$;
2. $VK \cong VH$.





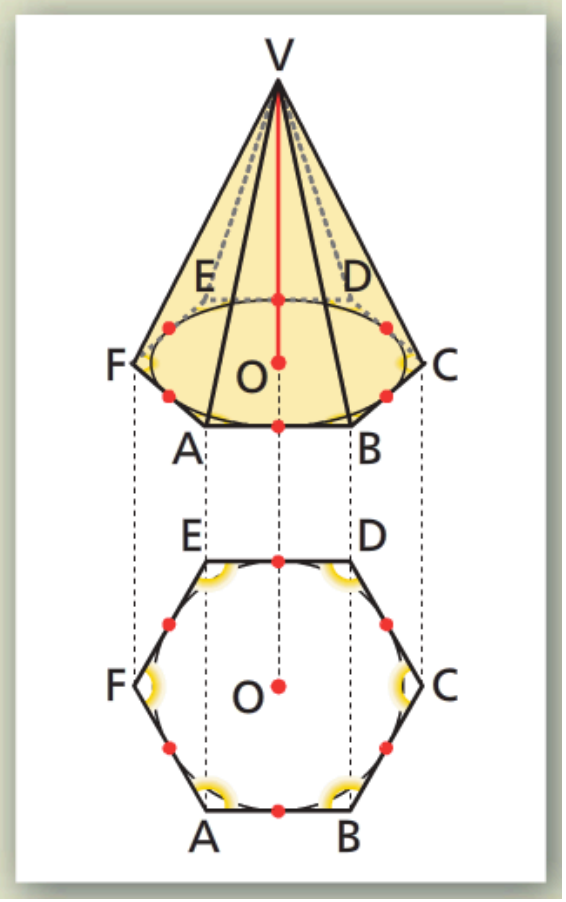
L'altezza delle facce laterali della piramide retta si chiama **apotema**

DEFINIZIONE

Piramide regolare

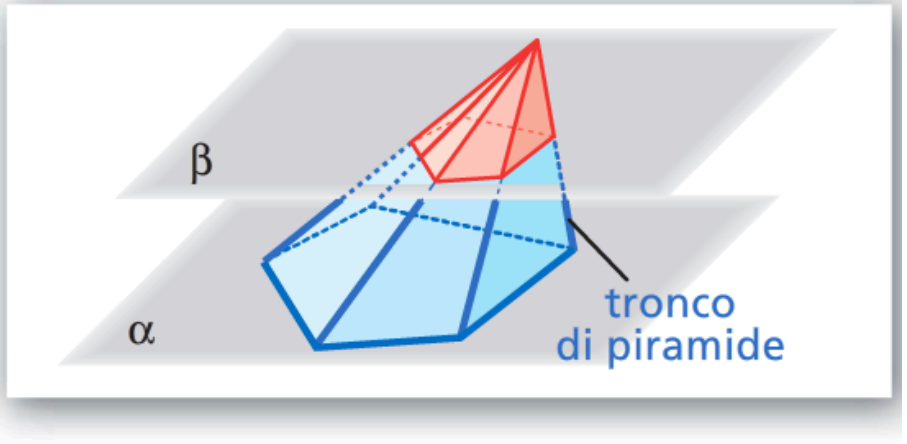
Una piramide retta si dice regolare quando la sua base è un poligono regolare.

Le facce laterali di una piramide regolare sono triangoli isosceli fra loro congruenti



Il tronco di piramide

Data una piramide, consideriamo le parti in cui viene divisa da un piano parallelo alla base e posto a una distanza dal vertice inferiore all'altezza della piramide.
Otteniamo due solidi:



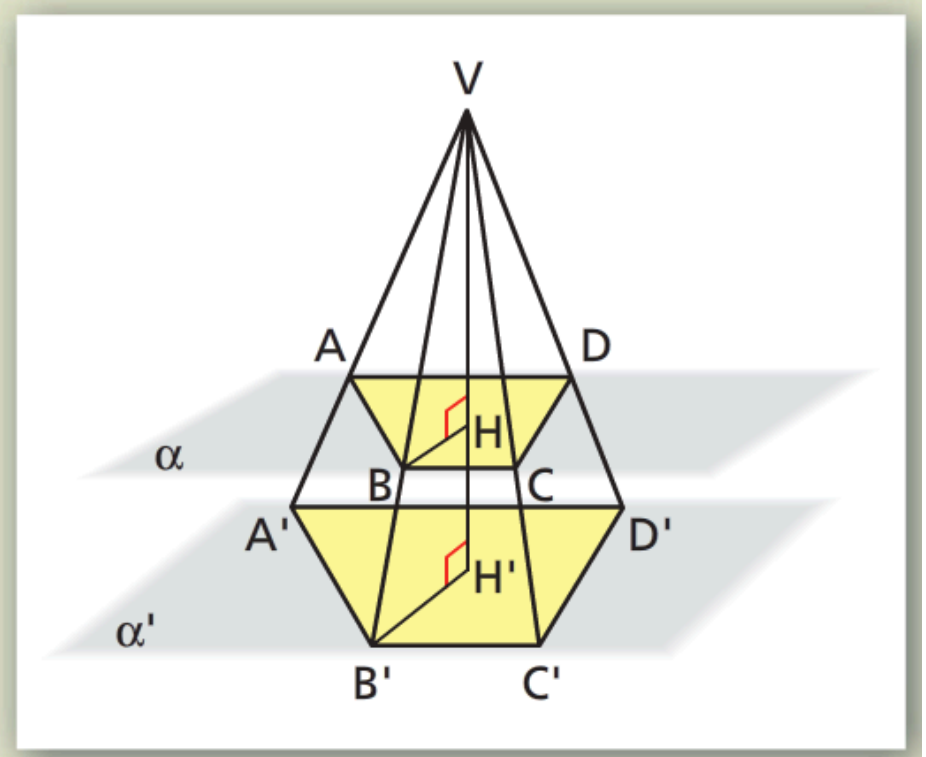
- una piramide più piccola, con lo stesso vertice della piramide data; si può dimostrare che le due piramidi sono solidi simili;
- un solido delimitato da due poligoni sui piani paralleli e da facce laterali che sono dei trapezi, chiamato **tronco di piramide**. I due poligoni sui piani paralleli sono detti **basi** e i trapezi **facce laterali** del tronco di piramide.

Un tronco di piramide è **retto** o **regolare** se deriva da una piramide retta o regolare.

TEOREMA

Se si taglia una piramide di vertice V con un piano parallelo alla base si ha che:

1. la sezione e la base sono poligoni simili;
2. i lati e i perimetri di questi poligoni sono proporzionali alle distanze del loro piano dal vertice V;
3. le misure delle superfici sono proporzionali ai quadrati delle misure di queste distanze.



Ipotesi

1. $\alpha \parallel \alpha'$;
2. $VH \perp \alpha$;
3. $VH' \perp \alpha'$.

Tesi

1. $ABCD \approx A'B'C'D'$;
2. $BC : B'C' = VH : VH'$;
   $2p : 2p' = VH : VH'$;
3. $S : S' = \overline{VH}^2 : \overline{VH'}^2$.

I poliedri regolari

Nel piano abbiamo studiato che un poligono è regolare se ha tutti i lati congruenti e tutti gli angoli congruenti. In analogia, anche nello spazio viene definito il *poliedro regolare*.

DEFINIZIONE

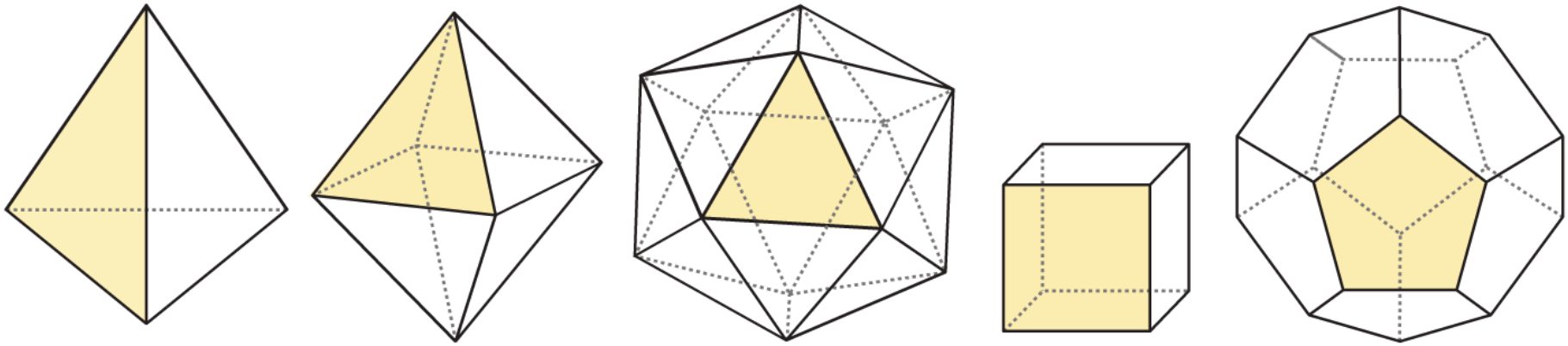
Poliedro regolare

Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e anche i suoi angoloidi e i suoi diedri sono congruenti.

Nel piano i poligoni regolari possono avere un qualunque numero di lati.
Si dimostra che nello spazio
i poliedri regolari sono soltanto i cinque:
i poliedri platonici.

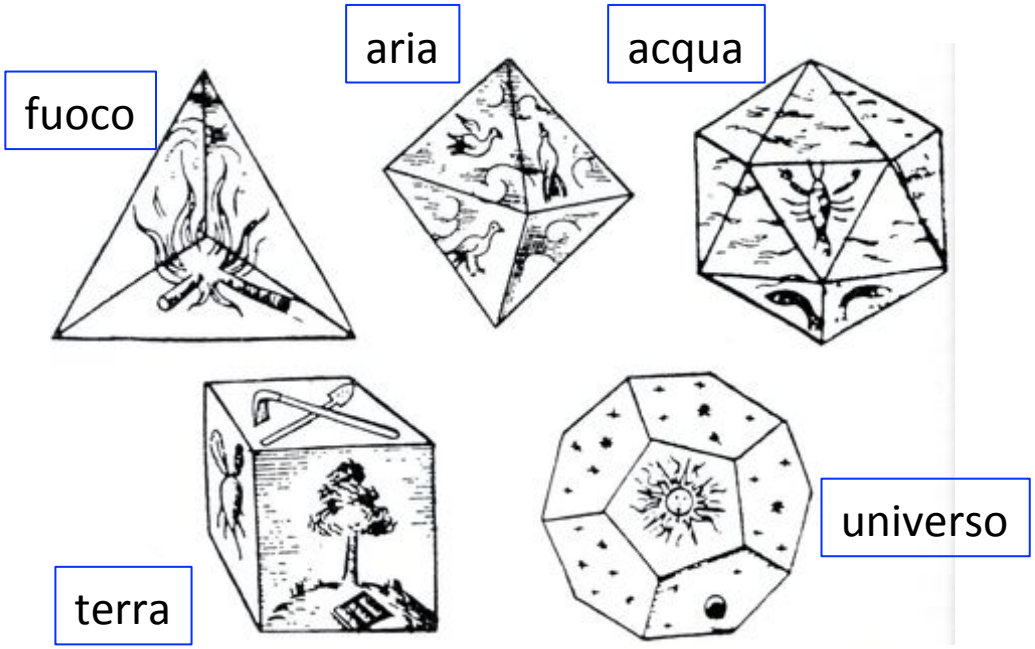
Ricordiamo che in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore di un angolo giro. Ciò limita la possibilità di ottenere poliedri regolari. Illustriamolo nella seguente tabella, in cui forniamo anche i nomi dei poliedri regolari possibili.

Poliedri regolari			
Poligoni regolari	**Numero di facce in un vertice**	**Somma degli angoli delle facce**	**Nome del poliedro**
triangoli equilateri (angoli di 60°)	3	$180° < 360°$	tetraedro
	4	$240° < 360°$	ottaedro
	5	$300° < 360°$	icosaedro
	6	$360° = 360°$	non esiste
quadrati (angoli di 90°)	3	$270° < 360°$	cubo
	4	$360° = 360°$	non esiste
pentagoni (angoli di 108°)	3	$324° < 360°$	dodecaedro
	4	$432° > 360°$	non esiste
esagoni (angoli di 120°)	3	$360° = 360°$	non esiste



▲ **Figura 30 I solidi platonici.** Il tetraedro regolare è racchiuso da 4 triangoli equilateri, l'ottaedro regolare da 8, l'icosaedro regolare da 20. Il cubo è anche chiamato esaedro regolare, perché è racchiuso da 6 quadrati (in greco *hex* significa «sei»). Il dodecaedro regolare ha 12 facce pentagonali.

Solidi platonici



I solidi di rotazione

◆ Definizione

Si chiama **solido di rotazione** il solido generato dalla rotazione di una figura piana intorno a una retta r, secondo un angolo α.

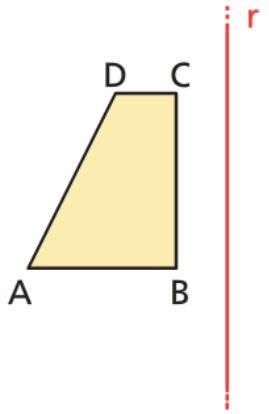
Se α è un angolo giro allora si dice che la rotazione è **completa**.

In una rotazione completa il punto P, che corrisponde a se stesso, descrive una circonferenza appartenente al piano perpendicolare alla retta e passante per P.

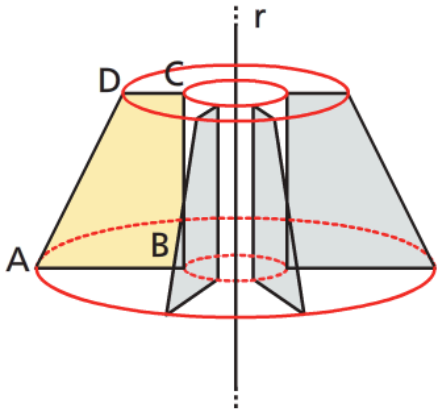
Noi studieremo soltanto solidi ottenuti da rotazioni complete.

ESEMPIO

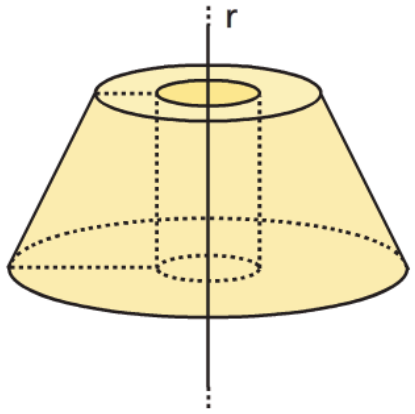
Disegniamo un solido di rotazione ruotando di un angolo giro un quadrilatero $ABCD$ attorno a una retta r.



a. Disegniamo il quadrilatero $ABCD$ e la retta r.



b. Facciamo ruotare il quadrilatero di un angolo giro attorno alla retta r. Ciascun punto del quadrilatero descrive una circonferenza.



c. Ecco il solido di rotazione ottenuto.

Fra i solidi ottenuti per rotazione studieremo solo i più semplici, ossia il cilindro, il cono e la sfera.

Il cilindro

DEFINIZIONE

Cilindro

Un cilindro è un solido generato dalla rotazione completa di un rettangolo attorno a uno dei suoi lati.

Il lato attorno al quale ruota il rettangolo è detto **altezza** del cilindro. Gli altri due lati perpendicolari all'altezza sono detti **raggi di base**.

I raggi di base nella rotazione determinano due cerchi, che sono detti **basi** del cilindro.

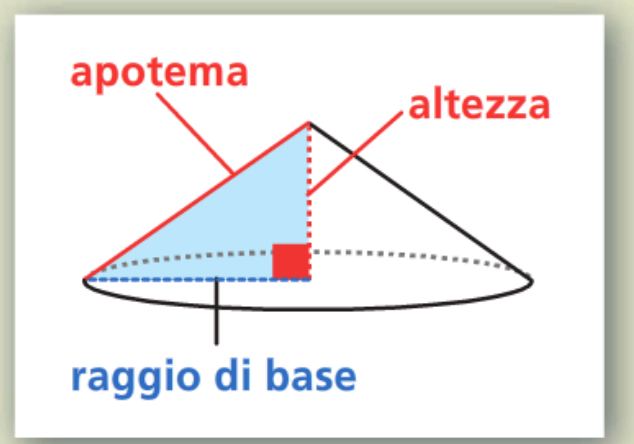
Un cilindro si dice **equilatero** se la sua altezza è congruente al diametro della base.

Il cono

DEFINIZIONE

Cono

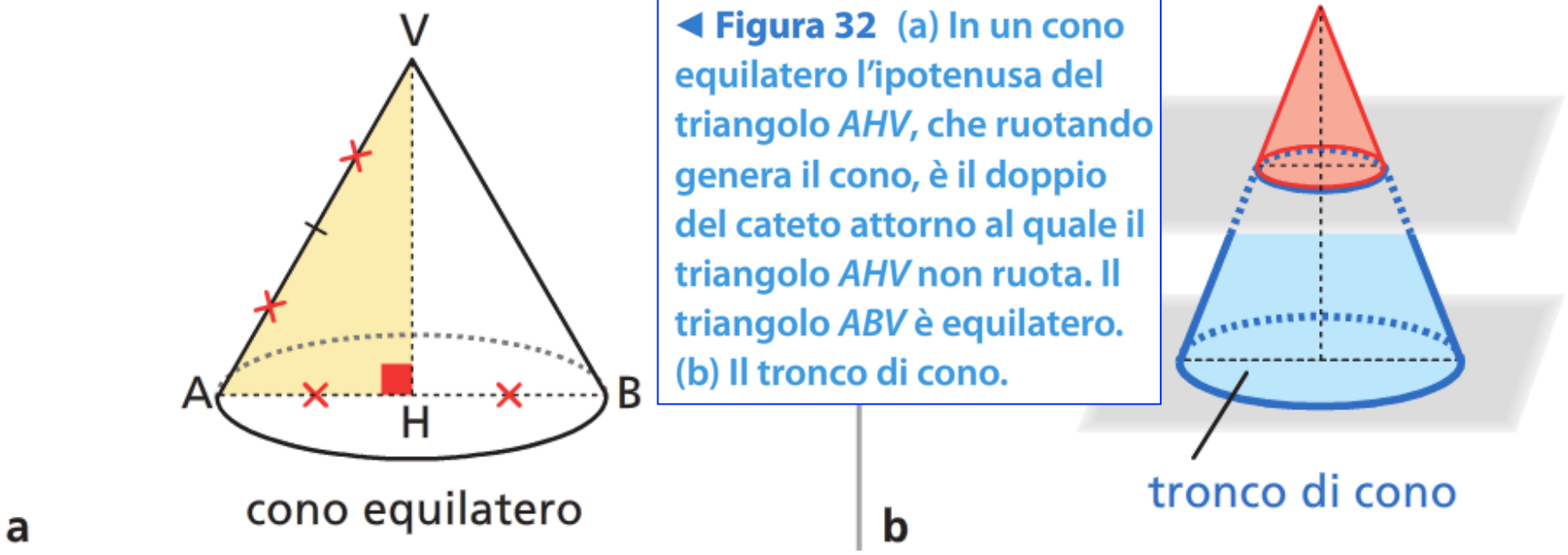
Un cono è un solido generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo attorno a uno dei cateti.



Il cateto attorno a cui ruota il triangolo è l'**altezza** del cono, l'altro cateto è il **raggio di base**. L'ipotenusa è detta **apotema** del cono.

Un cono si dice **equilatero** se l'apotema è congruente al diametro della base (figura 32*a*).

Sezionando un cono con un piano parallelo alla base otteniamo un cono più piccolo, simile a quello di partenza, e un **tronco di cono** (figura 32*b*).



◀ **Figura 32** (a) In un cono equilatero l'ipotenusa del triangolo *AHV*, che ruotando genera il cono, è il doppio del cateto attorno al quale il triangolo *AHV* non ruota. Il triangolo *ABV* è equilatero. (b) Il tronco di cono.

TEOREMA

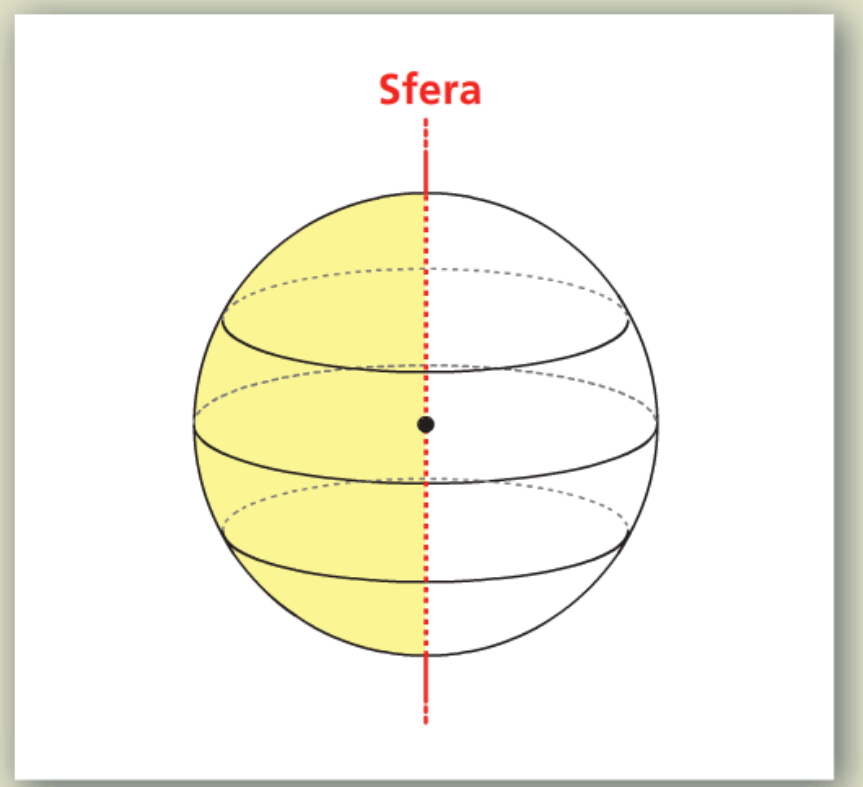
In un cono, le misure delle aree del cerchio di base e del cerchio ottenuto da una sezione parallela al piano di base stanno tra loro come i quadrati delle misure delle loro distanze dal vertice.

La sfera

DEFINIZIONE

Sfera

La sfera è un solido generato dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al suo diametro.

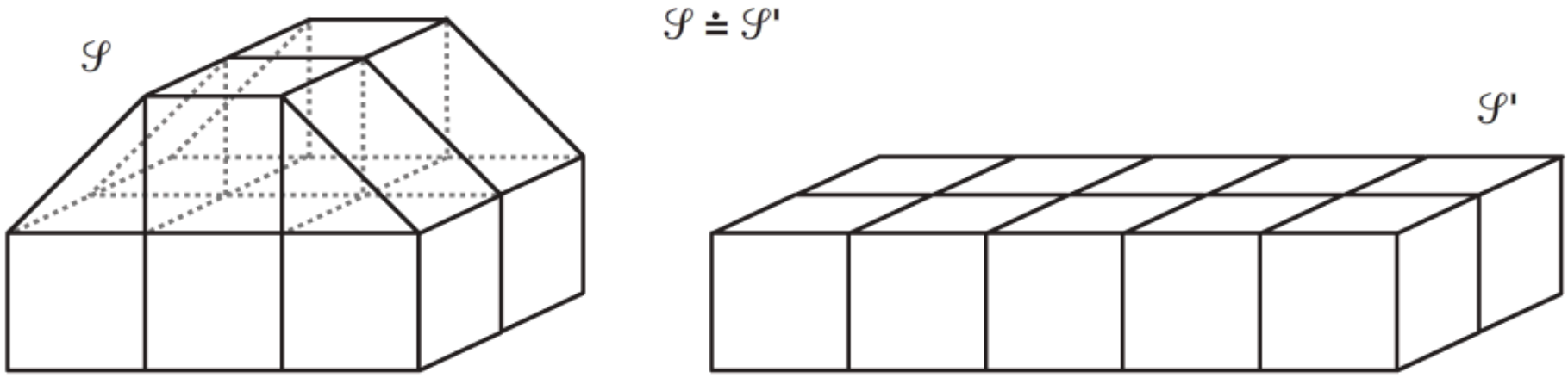


La semicirconferenza che ruota genera una superficie detta **superficie sferica**. Il raggio della semicirconferenza è detto **raggio** della sfera.

Estensione ed equivalenza dei solidi

L'estensione dei solidi

Il concetto di estensione spaziale deriva dalle nostre esperienze concrete. Siamo abituati a considerare un oggetto grande o piccolo a seconda che occupi più o meno spazio, o, come spesso diciamo, sia più o meno voluminoso. Se consideriamo poi due solidi di forma diversa ma realizzati con lo stesso materiale e dello stesso peso, diciamo che hanno la stessa estensione. Due solidi che hanno la stessa estensione si dicono **equivalenti**. Indichiamo l'equivalenza con il **simbolo** $\doteq$.

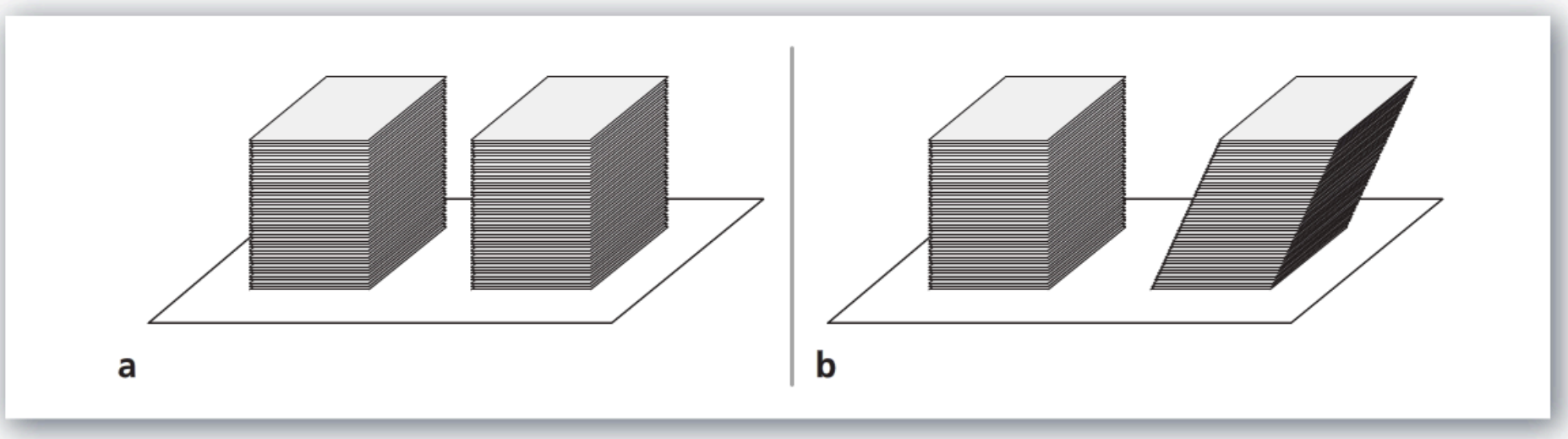


POSTULATO

Due solidi congruenti sono sempre equivalenti.

Il principio di Cavalieri

Consideriamo due pile di fogli a forma di parallelepipedo rettangolo (figura 45*a*), formate dalla sovrapposizione dello stesso numero di fogli: i solidi che li rappresentano sono congruenti e quindi equivalenti.



Possiamo far scorrere i fogli di uno di questi parallelepipedi in modo che la sua forma cambi (figura 45*b*). L'intuizione ci dice che l'estensione dei due solidi rimane la stessa e quindi essi sono ancora equivalenti.

Potremmo anche ripetere le considerazioni dell'esperienza precedente prendendo, al posto di pile di fogli uguali, pile di fogli che abbiano a due a due la stessa area ma forma diversa.

Passando dal mondo concreto alla geometria, possiamo pensare i fogli sostituiti dalle sezioni ottenute intersecando i solidi con piani tutti paralleli a uno scelto come riferimento. Possiamo così comprendere il seguente principio che assumiamo come postulato.

POSTULATO

Principio di Cavalieri

Due solidi che possono essere disposti in modo che ogni piano parallelo a un altro piano fissato, scelto come riferimento, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti.

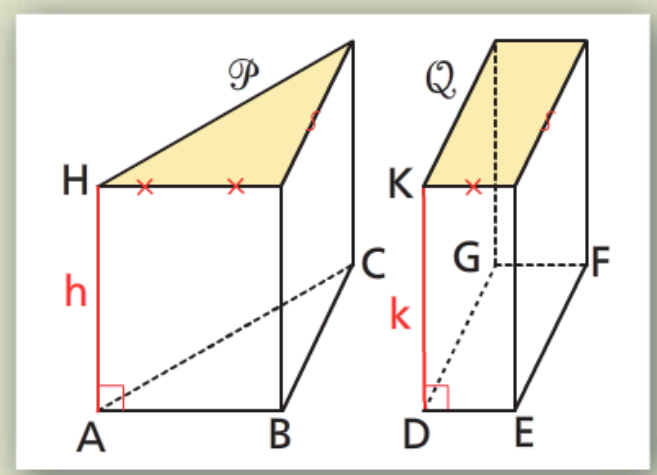
L'equivalenza dei solidi

TEOREMA

Se due prismi hanno basi equivalenti e altezze congruenti, allora sono equivalenti.

Ipotesi 1. $ABC \doteq DEFG$;
2. $h \cong k$.

Tesi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.

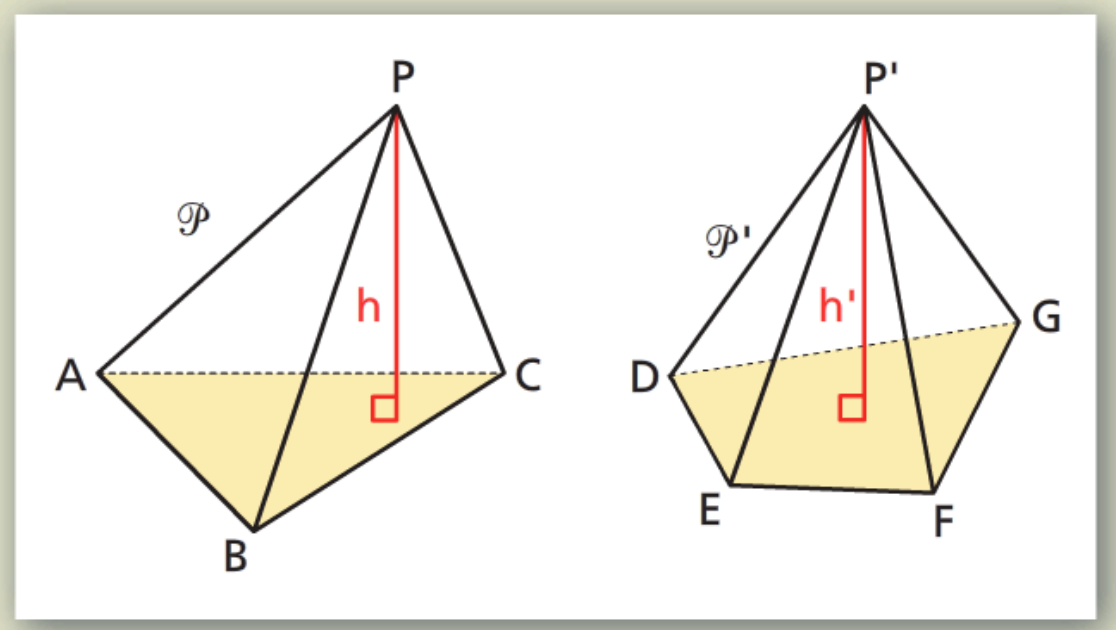


TEOREMA

Le piramidi che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.

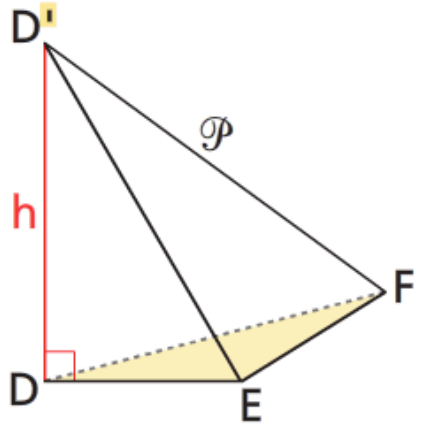
Ipotesi 1. $ABC \doteq DEFG$;
2. $h \cong k$.

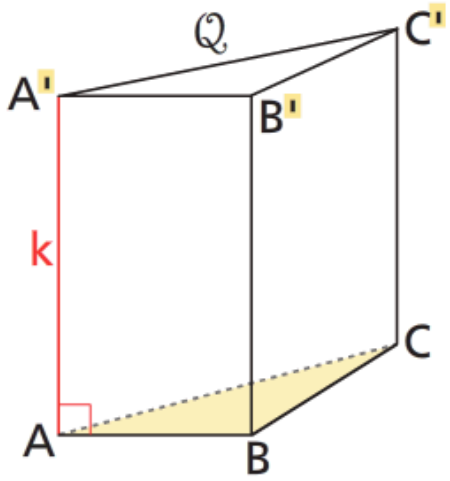
Tesi $\mathcal{P} \doteq \mathcal{P}'$.



TEOREMA

Una piramide è equivalente alla terza parte di un prisma che abbia la stessa base e la stessa altezza.





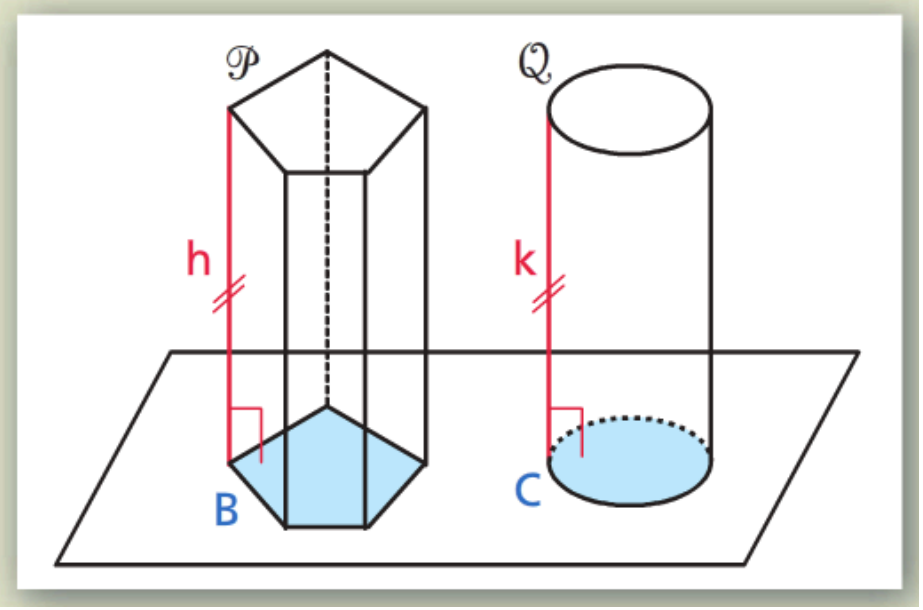
Ipotesi
1. $DEF \cong ABC$;
2. $h \cong k$.

Tesi
$\mathcal{P} \doteq \frac{1}{3}\mathcal{Q}$.

TEOREMA

Un prisma e un cilindro che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.

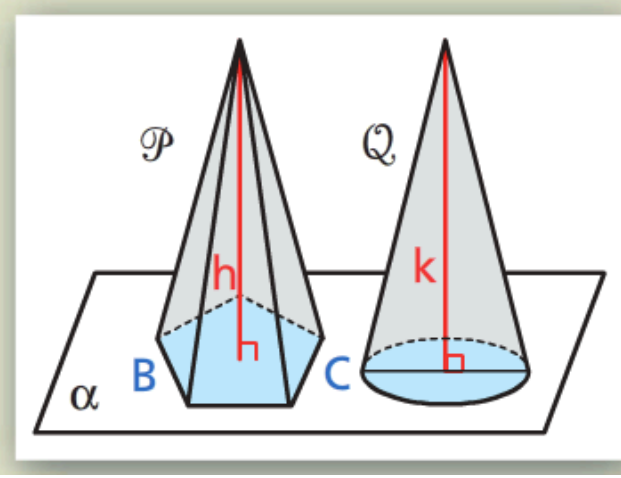
Ipotesi	**1.** $h \cong k$; **2.** $B \doteq C$.
Tesi	$\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.



TEOREMA

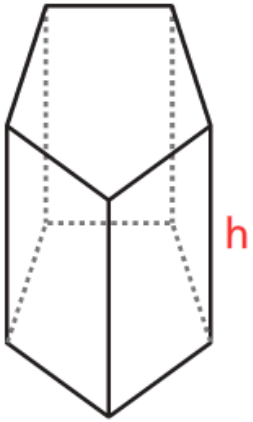
Una piramide e un cono che hanno basi equivalenti e altezze congruenti sono equivalenti.

Ipotesi	**1.** $h \cong k$; **2.** $B \doteq C$.
Tesi	$\mathcal{P} \doteq \mathcal{Q}$.



Area e volume dei solidi notevoli

PRISMA RETTO

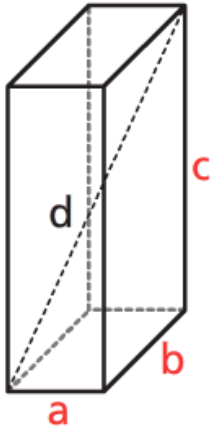


$A_\ell = 2p \cdot h$

$A_t = A_\ell + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO



$A_b = ab$

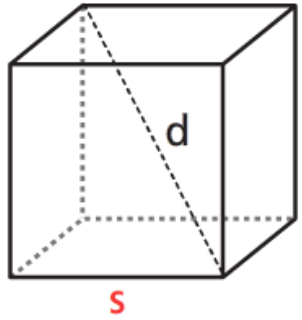
$A_\ell = 2\,(ac + bc)$

$A_t = 2(ac + ab + bc)$

$V = a \cdot b \cdot c$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

CUBO



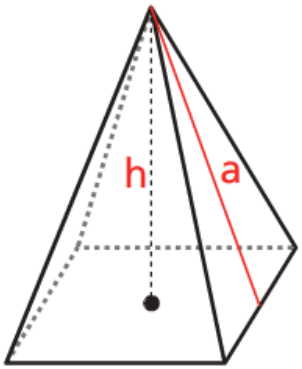
$A_b = s^2$

$A_t = 6\,s^2$

$V = s^3$

$d = s\sqrt{3}$

PIRAMIDE RETTA

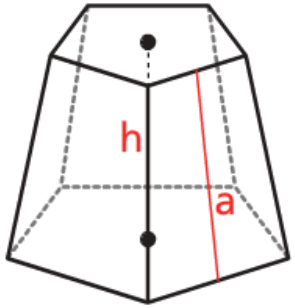


$A_\ell = p \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b$

$V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA

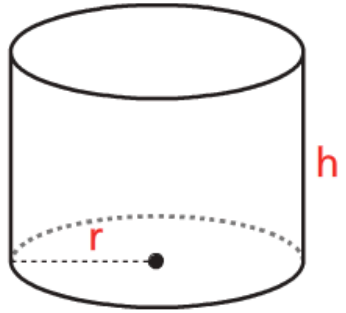


$A_\ell = (p + p') \cdot a$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3} h \left(A_b + A'_b + \sqrt{A_b \cdot A'_b}\right)$

CILINDRO



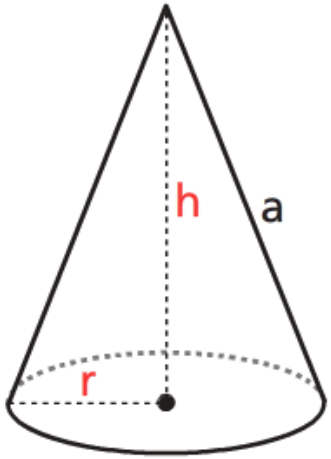
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = 2\pi r \cdot h$

$A_t = 2\pi r (h + r)$

$V = \pi r^2 \cdot h$

CONO



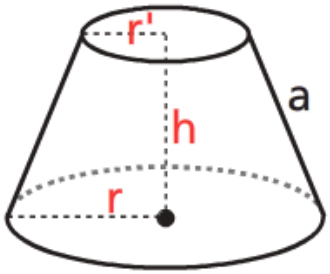
$A_b = \pi r^2$

$A_\ell = \pi r a$

$A_t = \pi r\,(a + r)$

$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 \cdot h$

TRONCO DI CONO



$A_b = \pi r^2$

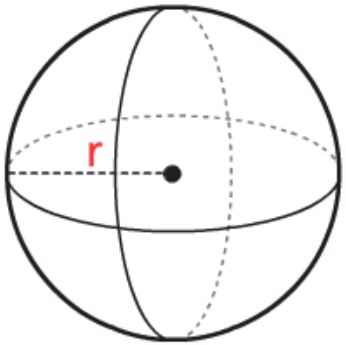
$A'_b = \pi r'^2$

$A_\ell = \pi a\,(r + r')$

$A_t = A_\ell + A_b + A'_b$

$V = \frac{1}{3}\,\pi h\,(r^2 + r'^2 + r \cdot r')$

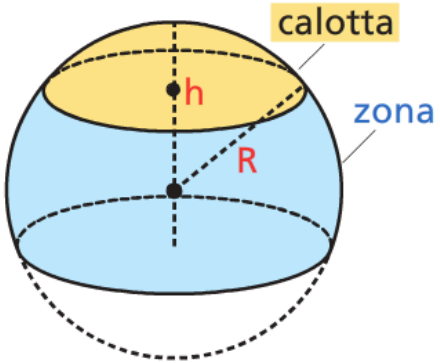
SFERA



$A = 4\pi r^2$

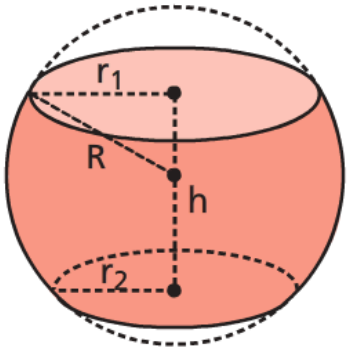
$V = \frac{4}{3}\,\pi r^3$

CALOTTA E ZONA SFERICA



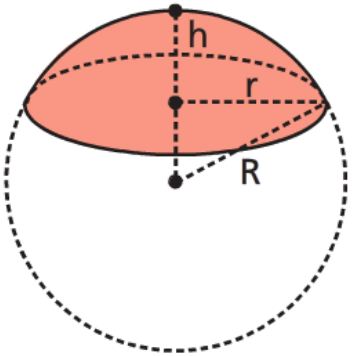
$$S = 2\pi Rh$$

SEGMENTO SFERICO A DUE BASI



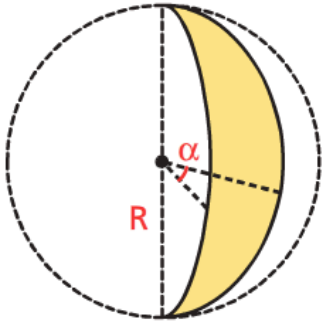
$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r_1^2\frac{h}{2} + \pi r_2^2\frac{h}{2}$$

SEGMENTO SFERICO A UNA BASE



$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \pi r^2\frac{h}{2} = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

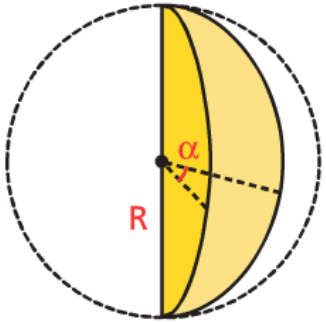
FUSO SFERICO



$$S_f = 2R^2\,\alpha_{rad} = \frac{\alpha^\circ}{90^\circ}\pi R^2$$

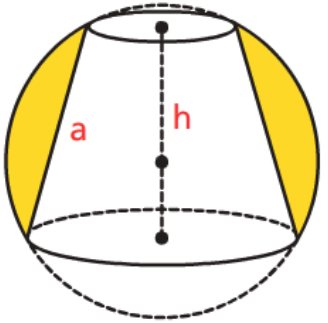
α_{rad}: ampiezza del diedro in radianti
α°: ampiezza del diedro in gradi

SPICCHIO SFERICO



$$V = \frac{2}{3}\alpha_{rad}R^3 = \frac{\alpha^\circ}{270^\circ}\pi R^3$$

ANELLO SFERICO



$$V = \frac{1}{6}\pi a^2 h$$

Esercizi

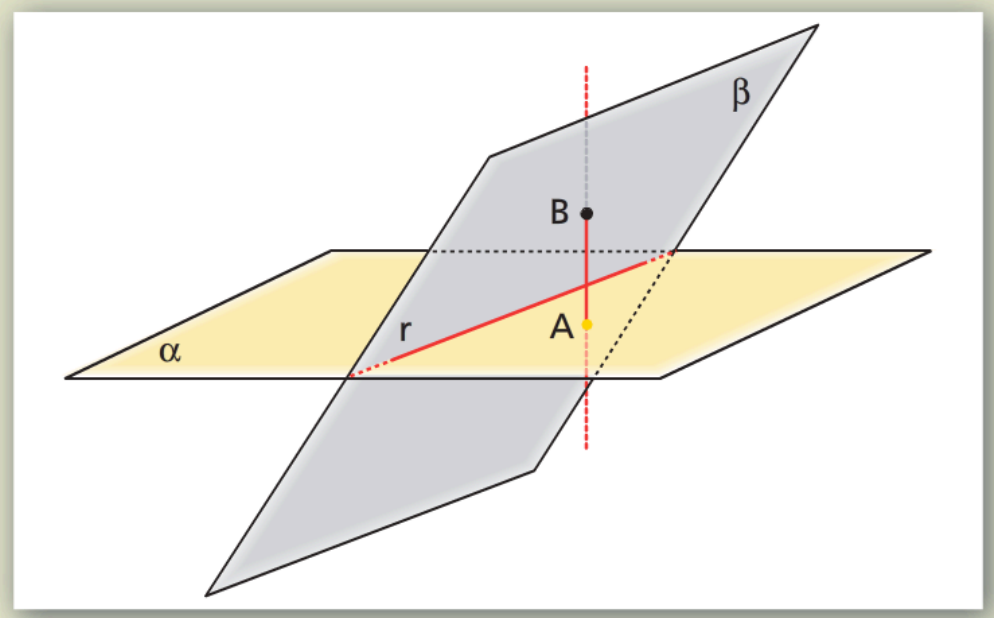
ESERCIZIO GUIDA

Siano α e β due piani incidenti e r la loro retta intersezione. Scelti sul piano α un punto A e sul piano β un punto B, non appartenenti a r, determiniamo la posizione della retta AB rispetto a r.

Dimostriamo che la retta AB e la retta r sono sghembe.

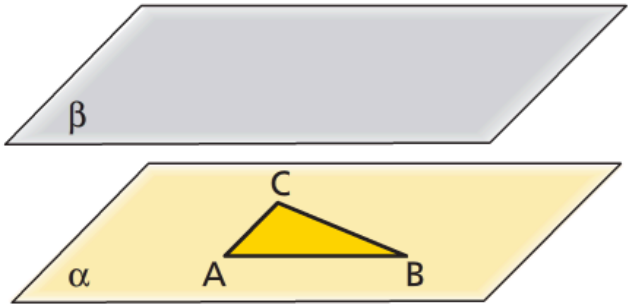
Ragioniamo per assurdo. Se le due rette non fossero sghembe, allora sarebbero complanari.

Supponiamo che AB e r appartengano a uno stesso piano: questo dovrebbe contenere r e i due punti A e B. Poiché $A \in \alpha$ e $B \in \beta$, i due piani α e β dovrebbero coincidere, contro l'ipotesi che α e β siano incidenti lungo una retta e quindi distinti. Pertanto la retta AB è sghemba rispetto a r.

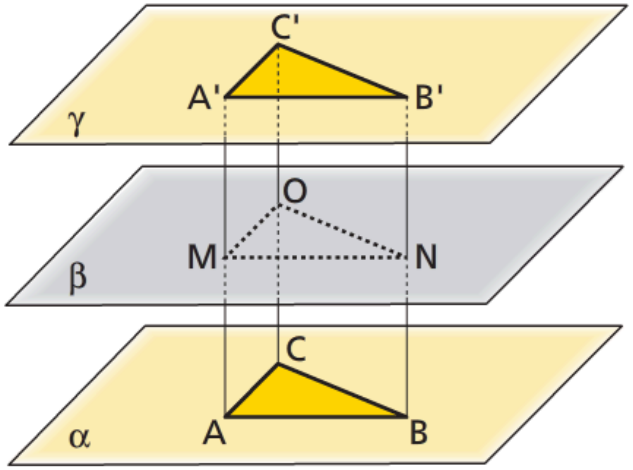


ESERCIZIO GUIDA

Dati due piani paralleli α e β, disegniamo su α un triangolo ABC, poi costruiamo il triangolo $A'B'C'$ simmetrico di ABC rispetto al piano β. Come è il piano del triangolo $A'B'C'$ rispetto al piano β?



a. Disegniamo i due piani paralleli α e β e, su α, il triangolo ABC.



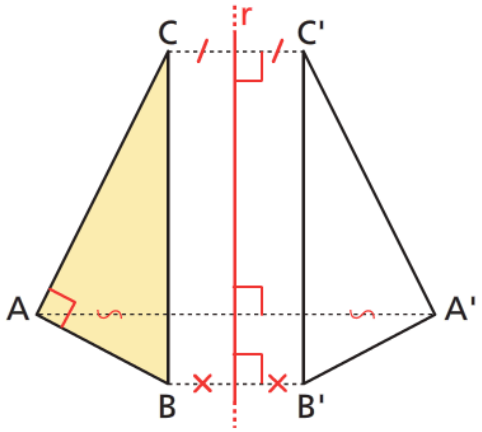
b. Tracciamo le perpendicolari al piano α passanti per i vertici A, B, e C e chiamiamo M, N e O, rispettivamente, le loro intersezioni con il piano β. Consideriamo infine i punti A', B' e C' tali che $AM \cong MA'$, $BN \cong NB'$ e $CO \cong OC'$.

Dimostriamo che il triangolo $A'B'C'$ appartiene a un piano parallelo al piano β.
I tre punti non allineati A', B' e C' individuano un piano γ, a cui appartiene il triangolo $A'B'C'$. Per costruzione, $AM \cong MA'$, $BN \cong NB'$, $CO \cong OC'$ e, poiché i due piani α e β sono paralleli, i segmenti di perpendicolare AM, BN e CO sono fra loro congruenti. Pertanto sono congruenti anche i segmenti di perpendicolare MA', NB' e OC'. Poiché questa proprietà vale considerati A, B e C qualsiasi e quindi per qualsiasi A', B', C', tutti i punti del piano γ risultano equidistanti da β, quindi γ è parallelo a β.

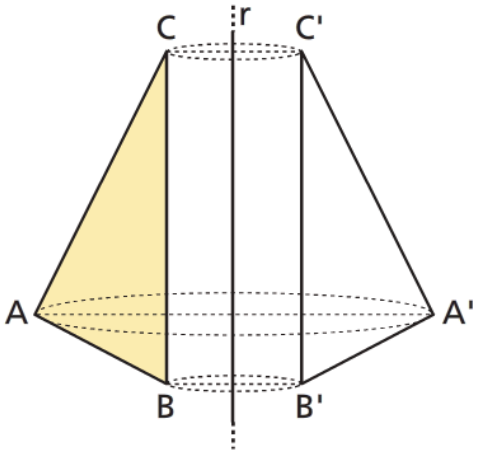
ESERCIZIO GUIDA

Disegniamo il solido di rotazione generato dalla rotazione completa di un triangolo rettangolo *ABC* intorno a una retta *r*, complanare al triangolo, che non interseca il triangolo ed è parallela all'ipotenusa. Descriviamo il solido ottenuto.

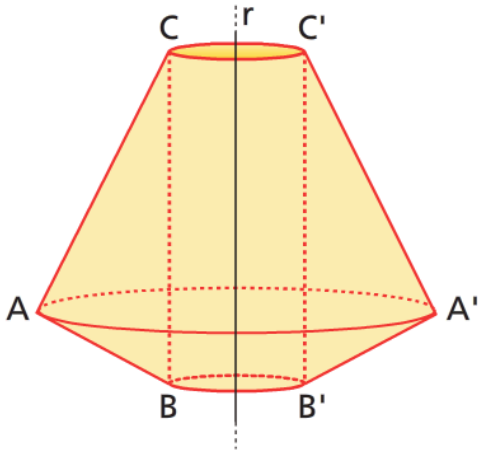
Costruzione



a. Supponiamo che il triangolo *ABC* giaccia sul piano della pagina del libro. Per disegnare la figura di rotazione determiniamo il triangolo *A'B'C'*, simmetrico di *ABC* rispetto all'asse *r* (che giace sullo stesso piano di *ABC*).



b. Disegniamo, in prospettiva e con tratto leggero, le tre circonferenze descritte da *A*, *B* e *C* nella rotazione intorno a *r* di un angolo giro.



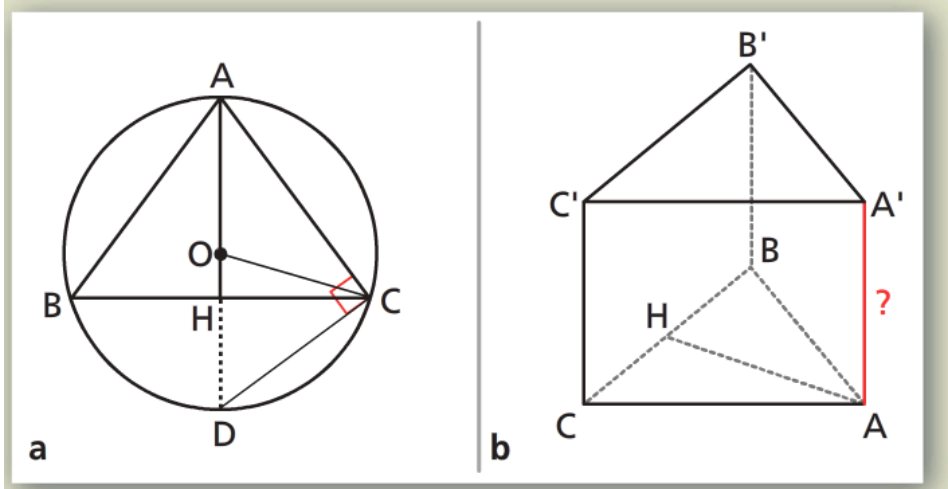
c. Evidenziamo in rosso a tratto continuo le linee visibili e tratteggiamo quelle non visibili.

Descrizione

Il solido è formato da due tronchi di cono, che hanno in comune la base maggiore, nei quali è scavato un foro cilindrico che ha per asse la retta *r*.

ESERCIZIO GUIDA

Un prisma retto ha per base un triangolo isoscele che è inscritto in un cerchio di raggio 6 dm. Sapendo che l'altezza relativa alla base del triangolo è 8 dm e la superficie totale del prisma è $92\sqrt{2}$ dm^2, calcoliamo l'altezza del solido.



Dati $\overline{CO} = 6$; $\overline{AH} = 8$; $A_t = 92\sqrt{2}$.

Domanda $\overline{AA'} = ?$

Consideriamo il triangolo isoscele che è la base del prisma ed è inscritto nel cerchio. Prolunghiamo l'altezza AH fino a incontrare in D la circonferenza (figura *a*). Il triangolo ACD è rettangolo in quanto inscritto in una semicirconferenza.
Scegliamo l'incognita. Poiché possiamo applicare il primo teorema di Euclide (un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa) è opportuno porre $\overline{AC} = x$. Impostando la proporzione si ha:

$$\overline{AH} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$$

$$8 : x = x : 12$$

$x^2 = 96$ da cui $x = 4\sqrt{6}$; $\overline{AC} = 4\sqrt{6}$.

Applichiamo ora il teorema di Pitagora al triangolo ACH:

$$\overline{CH}^2=\overline{AC}^2-\overline{AH}^2=(4\sqrt{6})^2-8^2=96-64=32$$

$$\overline{CH}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}=8\sqrt{2}\,.$$

Per calcolare l'altezza del prisma dobbiamo conoscere la superficie laterale, che si calcola con la formula $A_\ell = A_t - 2A_b$:

$$A_b = 8\sqrt{2}\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=32\sqrt{2}$$

$$A_\ell = 92\sqrt{2}-64\sqrt{2}=28\sqrt{2}$$

$$\overline{AA'}=\frac{A_\ell}{2p}$$

$$\overline{AA'}=\frac{28\sqrt{2}}{8\sqrt{6}+8\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{7(\sqrt{12}-2)}{2\cdot 4}=$$

$$=\frac{7(2\sqrt{3}-2)}{8}=$$

$$=\frac{7(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

L'altezza del prisma è $\frac{7(\sqrt{3}-1)}{4}$ dm.

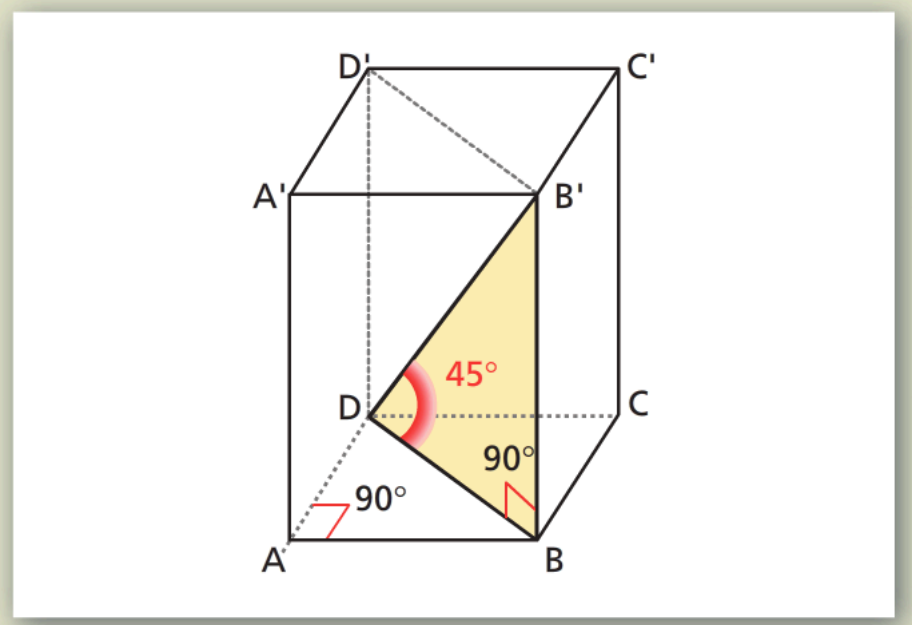
ESERCIZIO GUIDA

Un parallelepipedo rettangolo ha la diagonale che forma un angolo di 45° con la diagonale di base. La base ha un lato lungo 20 dm e l'altro che è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza del solido. Determiniamo l'area della superficie totale del parallelepipedo.

Dati $B\widehat{D}B' = 45°$;

$\overline{AB} = 20$;

$\overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{BB'}$.



Domanda Area totale?

Scegliamo l'incognita.

Poiché $\overline{BC}$ è i $\frac{2}{3}$ di $\overline{BB'}$, possiamo considerare un sottomultiplo comune, indicandone con la x la misura, tale che:

$\overline{BC} = 2x$

$\overline{BB'} = 3x$.

Sappiamo inoltre che la diagonale $\overline{DB'}$ forma un angolo di 45° con la diagonale $\overline{DB}$, ne deriva che il rettangolo $DBB'D'$ è un quadrato quindi:

$$\overline{DB} = \overline{BB'} = \overline{B'D'} = \overline{DD'} = 3x.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADB:

$$20^2 + 4x^2 = 9x^2 \quad \rightarrow \quad 5x^2 = 400 \quad \rightarrow \quad x^2 = 80 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{80} \quad \rightarrow \quad x = 4\sqrt{5}\,.$$

Sostituiamo alla x il valore trovato e otteniamo:

$$\overline{BC} = 8\sqrt{5} \text{ e } \overline{BB'} = 12\sqrt{5}\,.$$

Calcoliamo la superficie totale del parallelepipedo:

$$A_b = (20 \cdot 8\sqrt{5}) = 160\sqrt{5}$$

$$A_\ell = 2p \cdot h = (40 + 16\sqrt{5}) \cdot 12\sqrt{5} = 480\sqrt{5} + 960$$

$$A_t = 2A_b + A_\ell = 2 \cdot 160\sqrt{5} + 480\sqrt{5} + 960 = 800\sqrt{5} + 960.$$

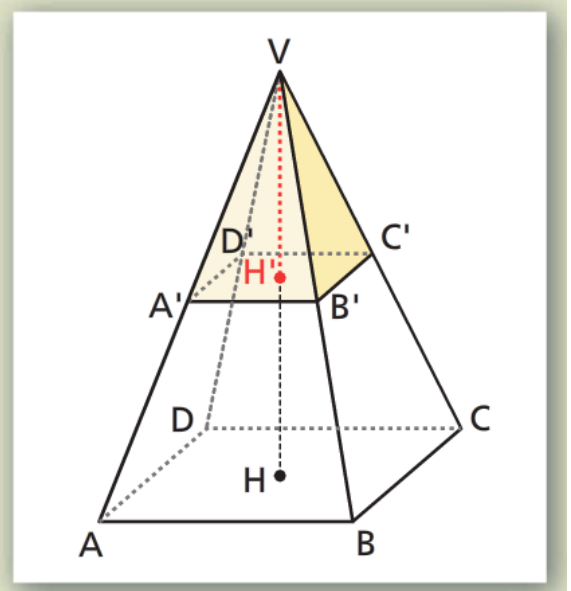
L'area della superficie totale del parallelepipedo rettangolo è $(800\sqrt{5} + 960)\ \text{dm}^2$.

ESERCIZIO GUIDA

Una piramide retta a base quadrata ha il perimetro di base di $192\sqrt{2}$ cm e l'altezza di $32\sqrt{2}$ cm. Viene tagliata da un piano parallelo al piano di base in modo che la somma delle aree laterali della piramide stessa e della piramide staccata risulti 7860 cm^2. Calcoliamo a quale distanza dal vertice la piramide viene tagliata.

Dati $2p(ABCD) = 192\sqrt{2}$;
$\overline{VH} = 32\sqrt{2}$;
$A_\ell + A'_\ell = 7860$.

Domanda $\overline{VH'} = ?$



Calcoliamo l'area A_ℓ della superficie laterale della piramide $VABCD$. Poiché $2p(ABCD) = 192\sqrt{2}$, possiamo ricavare facilmente la misura del lato AB:

$$\overline{AB} = \frac{2p}{4}$$

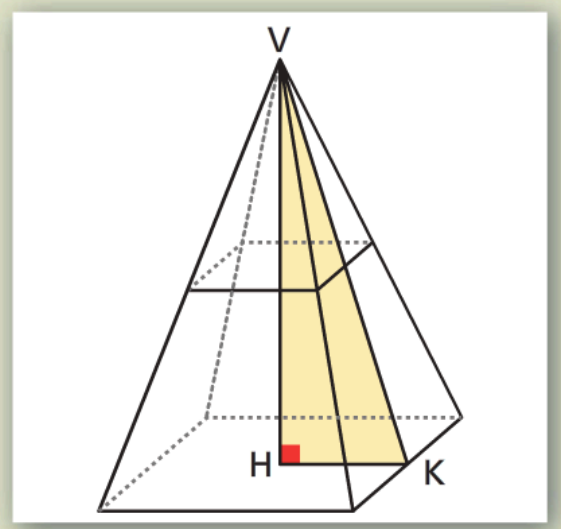
$$\overline{AB} = \frac{192\sqrt{2}}{4} = 48\sqrt{2}.$$

Calcoliamo l'apotema della piramide applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo VHK:

$$\overline{VK} = \sqrt{\overline{VH}^2 + \overline{HK}^2}$$

$$\overline{VK} = \sqrt{(32\sqrt{2})^2 + (24\sqrt{2})^2} =$$

$$= \sqrt{2048 + 1152} = \sqrt{3200} = 40\sqrt{2}\,.$$



La formula dell'area della superficie laterale della piramide è $A_\ell = p \cdot a$.

Poiché la misura del semiperimetro p vale $\frac{192\sqrt{2}}{2}$, ossia $p = 96\sqrt{2}$, si ha:

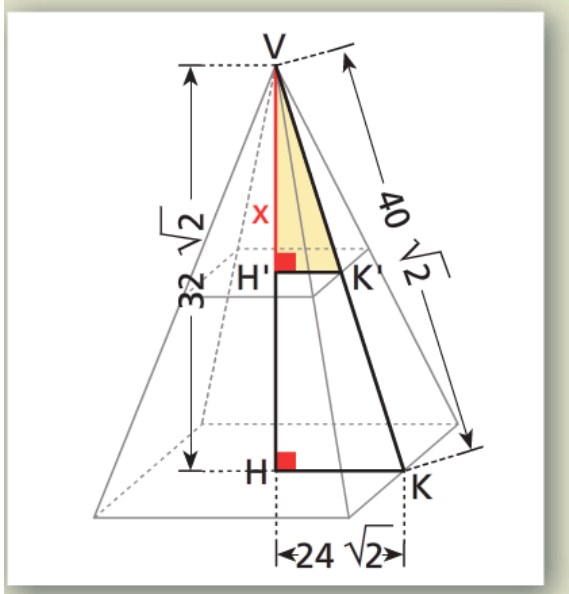
$$A_\ell = 96\sqrt{2} \cdot 40\sqrt{2} = 7680.$$

Calcoliamo l'area A'_ℓ della superficie laterale della piramide $VA'B'C'D'$ in funzione della misura della distanza dal vertice.

Indichiamo con x la misura dell'altezza della piramide $VA'B'C'D'$ e calcoliamo $\overline{H'K'}$ e $\overline{VK'}$ in funzione di x.

Poiché $\frac{\overline{VK}}{\overline{VH}} = \frac{40\sqrt{2}}{32\sqrt{2}} = \frac{5}{4}$, anche $\frac{\overline{VK'}}{\overline{VH'}} = \frac{5}{4}$, ossia:

$$\overline{VK'} = \frac{5}{4}\overline{VH'} \text{ e quindi } \overline{VK'} = \frac{5}{4}x.$$



I triangoli VHK e $VH'K'$ sono simili, perché gli angoli in H e in H' sono retti e l'angolo $\widehat{V}$ è in comune.

Poiché $\frac{\overline{HK}}{\overline{VH}} = \frac{24\sqrt{2}}{32\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$, anche $\frac{\overline{H'K'}}{\overline{VH'}} = \frac{3}{4}$,

ossia:

$$\overline{H'K'} = \frac{3}{4}\overline{VH'} \text{ e quindi } \overline{H'K'} = \frac{3}{4}x.$$

La misura del perimetro di base di $A'B'C'D'$ è:

$$4 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{4}x\right) = 6x.$$

La misura dell'area della superficie laterale, in funzione di x, è:

$$A'_\ell = \left(\frac{1}{2} \cdot 6x\right) \cdot \frac{5}{4}x = \frac{15}{4}x^2.$$

Poiché $A_\ell + A'_\ell = 7860$, sostituendo otteniamo:

$$7680 + \frac{15}{4}x^2 = 7860$$

$$\frac{15}{4}x^2 = 180$$

$$x^2 = 180 \cdot \frac{4}{15} = 12 \cdot 4$$

$$x = \pm\sqrt{12 \cdot 4} = \pm 4\sqrt{3}$$

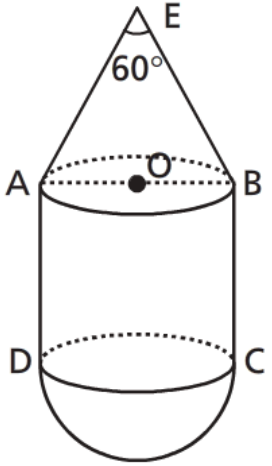
$x = -4\sqrt{3}$ non accettabile, perché negativo;

$x = 4\sqrt{3}$.

Il piano taglia la piramide a una distanza di $4\sqrt{3}$ cm dal vertice.

ESERCIZIO GUIDA

Un cilindro, la cui base ha raggio $6a$, ha una superficie totale di $120\pi a^2$. Sulle due basi sono appoggiati rispettivamente un cono equilatero e una semisfera, le cui basi coincidono con quelle del cilindro. Calcoliamo l'area della superficie totale del solido.



Dati $\overline{OB} = 6a$;
$A_{t\ cilindro} = 120\pi \cdot a^2$;
$\overline{AB} = \overline{BE}$.

Domanda
Superficie totale del solido?

Per calcolare l'area della superficie totale del solido dobbiamo conoscere la superficie laterale del cilindro e del cono e la superficie della semisfera.

- Calcoliamo l'area della superficie della base del cilindro:

$$A_b = \pi \cdot r^2 = 36\pi \cdot a^2 \rightarrow 2A_b = 72\pi \cdot a^2.$$

- Calcoliamo l'area della superficie laterale del cilindro:

$$A_{lat.\ cilindro} = 120\pi \cdot a^2 - 72\pi \cdot a^2 = 48\pi \cdot a^2.$$

- Calcoliamo l'area della superficie laterale del cono che, essendo equilatero, ha l'apotema uguale al diametro delle basi: $\overline{AB} = \overline{EB} = 12a$.

$$A_{lat.\ cono} = 2\pi \cdot r \cdot apotema \cdot \frac{1}{2} = \pi \cdot 6a \cdot 12a = 72\pi \cdot a^2.$$

- Calcoliamo la superficie della semisfera:

$$A_{semisfera} = 2\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot 36a^2 = 72\pi \cdot a^2.$$

- La superficie totale è:

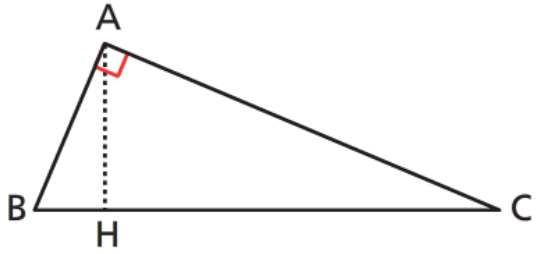
$$A_t = A_{lat.\ cilindro} + A_{lat.\ cono} + A_{semisfera} =$$

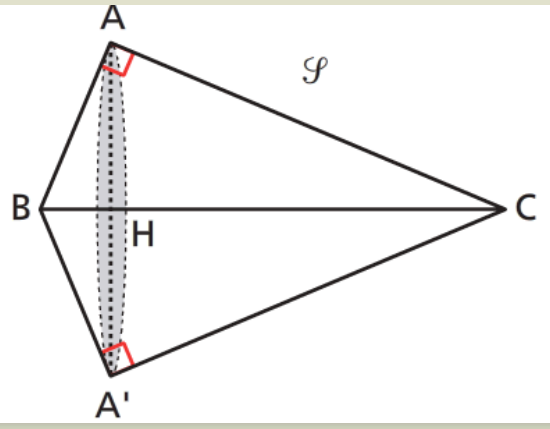
$$= 48\pi \cdot a^2 + 72\pi \cdot a^2 + 72\pi \cdot a^2 = 192\pi \cdot a^2.$$

La superficie totale del solido è $192\pi \cdot a^2$.

ESERCIZIO GUIDA

Un triangolo rettangolo ha i cateti lunghi rispettivamente 12 cm e 16 cm. Facendo ruotare di 360° il triangolo attorno all'ipotenusa otteniamo un solido $\mathcal{S}$. Calcoliamo l'area della superficie totale di tale solido.





Dati $\overline{AB} = 12$; $\overline{AC} = 16$. **Domanda** $A_t(\mathcal{S})$?

Dalla rotazione del triangolo ABC intorno all'ipotenusa si ottiene un solido formato da due coni che hanno la stessa base di raggio AH.

Calcoliamo gli elementi del triangolo ABC.

Applichiamo il teorema di Pitagora:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \\ = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20.$$

Calcoliamo $\overline{AH}$, sapendo che l'altezza di un triangolo si calcola dividendo la doppia area del triangolo per la sua base:

$$\overline{AH} = \frac{2A_{ABC}}{\overline{BC}} = \frac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6.$$

- Calcoliamo la superficie laterale del cono $AA'B$:

$$A_\ell = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 9{,}6 \cdot 12 \simeq 361{,}91.$$

- Calcoliamo la superficie laterale del cono $AA'C$:

$$A'_\ell = \pi \cdot r \cdot a = \pi \cdot 9{,}6 \cdot 16 \simeq 482{,}55.$$

- Calcoliamo la superficie totale del solido $\mathcal{S}$:

$$A_t(\mathcal{S}) \simeq 361{,}91 + 482{,}55 = 844{,}46.$$

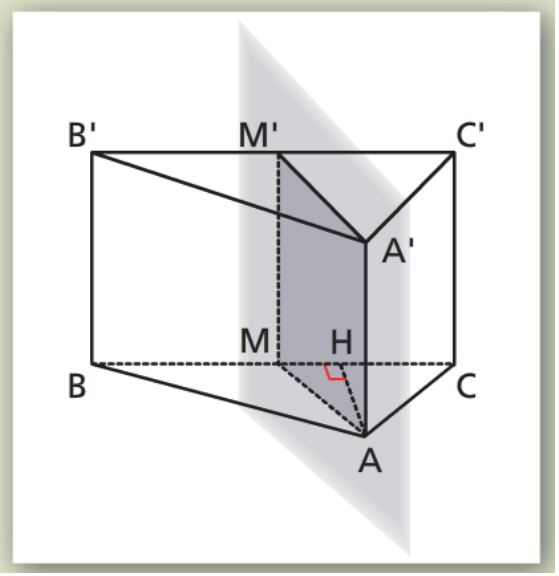
La superficie totale del solido è 844,46 cm^2.

ESERCIZIO GUIDA

Un prisma retto a base triangolare è sezionato da un piano parallelo agli spigoli laterali e passante per una mediana delle basi. Dimostriamo che i due prismi che si vengono a formare sono equivalenti.

Ipotesi **1.** $BM \cong MC$;
2. il prisma è retto.

Tesi Il prisma $ABMA'B'M'$ è equivalente al prisma $AMCA'M'C'$.

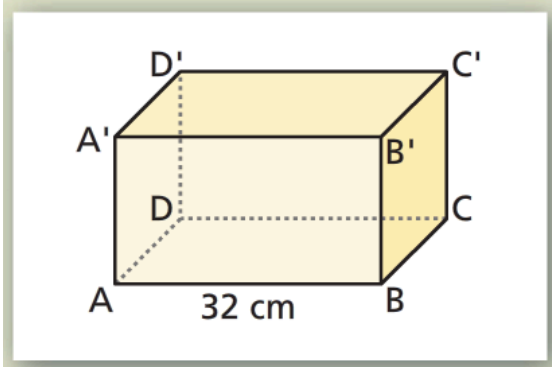


Consideriamo il triangolo ABC, base del prisma dato; esso è diviso dalla mediana AM in due triangoli equivalenti, poiché hanno basi congruenti ($BM \cong MC$) e uguale altezza AH, rappresentata dalla distanza del vertice A dalla retta di base BC.

Il prisma $ABMA'B'M'$ è equivalente al prisma $AMCA'M'C'$ poiché due prismi sono equivalenti se hanno basi equivalenti e altezze congruenti.

ESERCIZIO GUIDA

Un parallelepipedo rettangolo ha l'area laterale di 8400 cm^2. La base ha un lato di 32 cm e l'altro è $\frac{8}{25}$ dell'altezza del solido. Calcoliamo il volume e la lunghezza della diagonale.

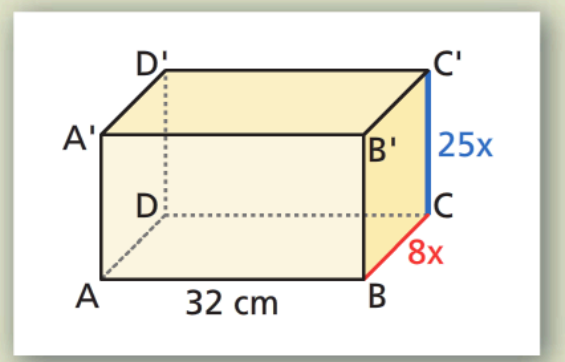


Dati $A_\ell = 8400$;
$\overline{AB} = 32$;
$\overline{BC} = \frac{8}{25}\,\overline{CC'}$.

Domande
1. Volume?
2. Diagonale?

Scegliamo l'incognita.

Poiché BC e l'altezza sono una gli $\frac{8}{25}$ dell'altra, possiamo considerare un segmento sottomultiplo comune e indicare con x la sua misura. In tal modo risulta: $\overline{BC} = 8x$ e $\overline{CC'} = 25x$.



Calcoliamo il volume del solido.

Poiché $A_\ell = 8400$, determiniamo la misura A_ℓ in funzione di x e poi uguagliamo a 8400:

$$A_\ell = 2 \cdot (\overline{AB} + \overline{BC}) \cdot \overline{CC'}$$

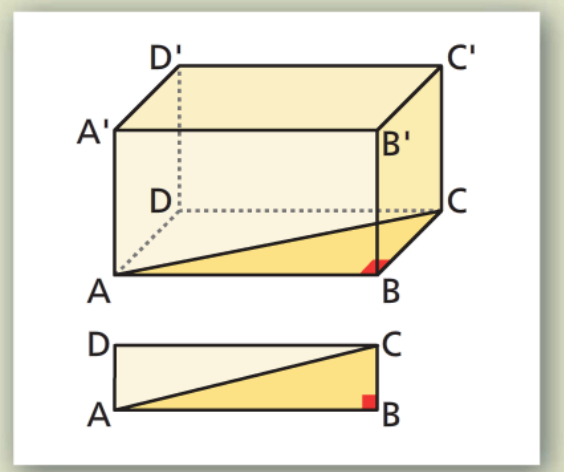
$$A_\ell = 2 \cdot (32 + 8x) \cdot 25x = 1600x + 400x^2$$

$$1600x + 400x^2 = 8400.$$

Dividiamo i due membri per 100:

$$16x + 4x^2 = 84.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:



$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1024 + 576} =$$

$$= \sqrt{1600} = 40.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ACC':

Dividiamo i due membri per 4:

$$4x + x^2 = 21$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4 + 21} = \begin{cases} -7 \text{ non accettabile } (x \text{ è una misura positiva}) \\ 3 \end{cases}$$

Pertanto la misura cercata è $x = 3$.

Sostituiamo 3 e troviamo le misure:

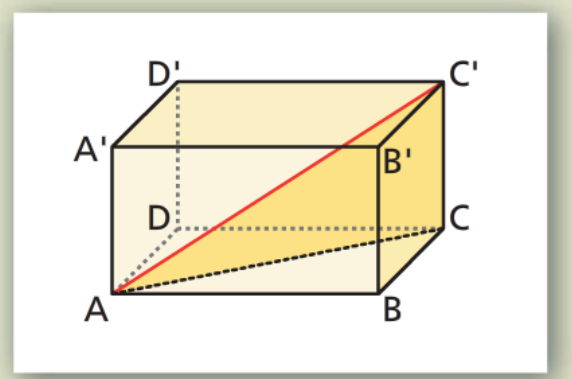
$$\overline{BC} = 8x = 8 \cdot 3 = 24;$$

$$\overline{CC'} = 25x = 25 \cdot 3 = 75.$$

Poiché la formula per calcolare il volume è $V = A_b \cdot h$, la misura del volume è:

$$V = (32 \cdot 24) \cdot 75 = 57\,600 \text{ cm}^3.$$

Calcoliamo la diagonale del parallelepipedo.



$$\overline{AC'} = \sqrt{\overline{CC'}^2 + \overline{AC}^2}$$

$$\overline{AC'} = \sqrt{75^2 + 40^2} = \sqrt{5625 + 1600} =$$

$$= \sqrt{7225} = 85.$$

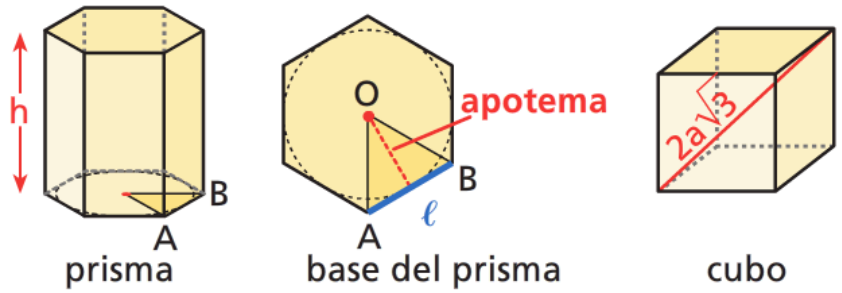
Osservazione. Conoscendo le tre dimensioni a, b e c del parallelepipedo, è possibile trovare la diagonale più velocemente utilizzando la formula $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$:

$$\overline{AC'} = \sqrt{32^2 + 24^2 + 75^2} = 85.$$

Il volume del parallelepipedo dato è di 57 600 cm^3 e la diagonale di 85 cm.

ESERCIZIO GUIDA

In un prisma regolare a base esagonale il rapporto fra l'altezza e il lato di base è $2\sqrt{3}$ e l'area laterale è $192a^2\sqrt{3}$. Calcoliamo il rapporto fra il volume del prisma e il volume di un cubo di diagonale $2a\sqrt{3}$.



Dati $\frac{h}{l} = 2\sqrt{3}$;

$A_\ell = 192a^2\sqrt{3}$;

$d = 2a\sqrt{3}$.

Domanda $\frac{V(\text{prisma})}{V(\text{cubo})}$?

Calcoliamo il volume del prisma.
Scegliamo l'incognita.

Poiché $\frac{h}{l} = 2\sqrt{3}$, risulta $h = 2\sqrt{3} \cdot l$.

Pertanto, se poniamo $l = x$, abbiamo $h = 2\sqrt{3} \cdot x$.

Poiché $A_\ell = 192a^2\sqrt{3}$, determiniamo A_ℓ in funzione di x e poi uguagliamo l'espressione ottenuta a $192a^2\sqrt{3}$:

$$A_\ell = 2p \cdot h \rightarrow A_\ell = 6x \cdot 2\sqrt{3}\,x = 12\sqrt{3}\,x^2$$

$$12\sqrt{3}\,x^2 = 192a^2\sqrt{3} \rightarrow 12x^2 = 192a^2$$

$$x^2 = \frac{192a^2}{12}$$

$$x^2 = 16a^2$$

$$x = \pm 4a = \begin{cases} -4a \text{ non accettabile, perché negativa} \\ 4a \end{cases}$$

Pertanto, $x = 4a$.

Sostituiamo a x il valore $4a$ e calcoliamo le misure del prisma:

$$l = 4a$$

$$h = 2\sqrt{3} \cdot 4a = 8a\sqrt{3}.$$

Poiché la formula per calcolare il volume del prisma è $V = A_b \cdot h$, dobbiamo calcolare l'area di base.

Per farlo, usiamo la formula $A_b = p \cdot apotema$.

Determiniamo l'apotema dell'esagono applicando la formula dell'altezza del triangolo equilatero OAB:

$$apotema = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}.$$

Poiché il perimetro di base è $2p = 24a$, e quindi $p = 12a$, risulta:

$$A_b = 12a \cdot 2a\sqrt{3} = 24a^2\sqrt{3}.$$

Il volume del prisma è:

$$V(\text{prisma}) = 24a^2\sqrt{3} \cdot 8a\sqrt{3} = 576a^3.$$

Calcoliamo il volume del cubo.
In un cubo di lato y la diagonale è $d = y \cdot \sqrt{3}$, pertanto, invertendo la relazione, otteniamo $y = \frac{d}{\sqrt{3}}$.
Poiché $d = 2a\sqrt{3}$, risulta:

$$y = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2a.$$

Il volume del cubo è:

$$V(\text{cubo}) = (2a)^3 = 8a^3.$$

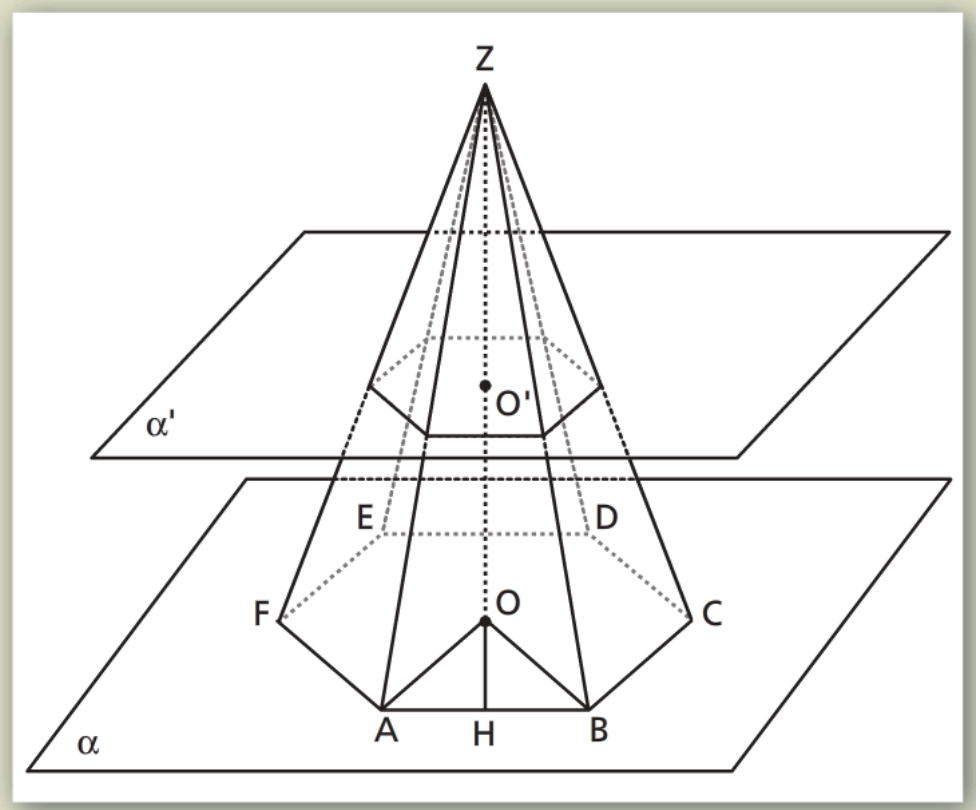
Calcoliamo il rapporto fra i due volumi:

$$\frac{V(\text{prisma})}{V(\text{cubo})} = \frac{576a^3}{8a^3} = 72.$$

Il rapporto fra i volumi è 72.

ESERCIZIO GUIDA

Una piramide regolare a base esagonale ha il perimetro di base di 72 dm e l'altezza di 10 dm.
Viene tagliata da un piano parallelo alla base in modo che il volume della piramide staccata sia $\frac{1}{4}$ del volume della piramide data. Calcoliamo a quale distanza dal vertice la piramide viene tagliata.



Dati $2p(ABCDEF) = 72$; $\overline{OZ} = 10$; $\alpha \,//\, \alpha'$; $V' = \frac{1}{4}V$.

Domanda $\overline{O'Z}$?

Calcoliamo il lato dell'esagono di base:

$$\overline{AB} = \frac{72}{6} = 12.$$

Calcoliamo $\overline{OH}$, essendo OH l'altezza del triangolo equilatero OAB. Ricordiamo che il triangolo OAH è rettangolo e ha gli angoli acuti di 30° e 60°:

$$\overline{OH} = \frac{l}{2}\sqrt{3} = \frac{12}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

Calcoliamo la superficie della base della piramide maggiore:

$$A_b = \frac{2p \cdot \overline{OH}}{2} = \frac{72 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 216\sqrt{3}.$$

Calcoliamo il volume V della piramide maggiore:

$$V = \frac{1}{3}A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 216\sqrt{3} \cdot 10 = 720\sqrt{3}.$$

Calcoliamo il volume V' della piramide minore:

$$V' = \frac{720\sqrt{3}}{4} = 180\sqrt{3}.$$

Chiamiamo $x = \overline{O'Z}$ e ricordiamo il teorema secondo il quale se si taglia una piramide con un piano parallelo alla base, la base e la sezione sono poligoni simili le cui aree sono proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice:

$$A_b : A'_b = 10^2 : x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow A'_b = \frac{216 \cdot \sqrt{3}\, x^2}{100} = 2{,}16 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2.$$

Essendo:

$$V' = \frac{1}{3}A'_b \cdot \overline{O'Z}$$

scriviamo l'equazione:

$$\frac{1}{3} \cdot 2{,}16 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 \cdot x = 180 \cdot \sqrt{3}$$

da cui otteniamo:

$$x^3 = \frac{180}{0{,}72} = 250 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{250} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x \simeq 6{,}30.$$

Il piano parallelo alla base taglia la piramide a una distanza di 6,30 dm dal vertice.

ESERCIZIO GUIDA

Un cono e un cilindro hanno altezza congruente e pari al doppio dei loro raggi di base. La somma delle loro aree totali è $12\pi(7+\sqrt{5})$ cm^2 e il rapporto fra la somma delle loro aree laterali e l'area di una superficie sferica è $\left(1+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$. Calcoliamo il raggio della sfera. Verifichiamo poi che il volume della sfera è uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.

Dati

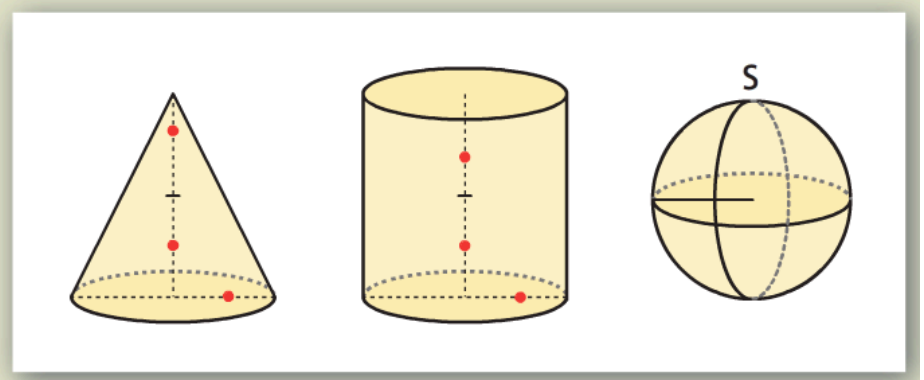
$h(\text{cono}) = h(\text{cilindro}) = 2 \cdot r(\text{cono}) = 2 \cdot r(\text{cilindro})$;

$A_t + A'_t = 12\pi(7+\sqrt{5})$;

$\frac{(A_\ell + A'_\ell)}{S} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}$.

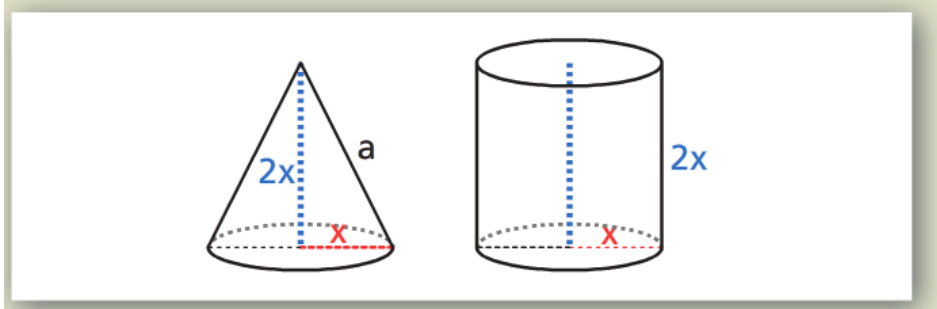
Domande

1. raggio (sfera)?
2. $V(\text{sfera}) = V(\text{cilindro}) - V(\text{cono})$?



1. Calcoliamo il raggio della sfera.

Calcoliamo prima il raggio di base. Indichiamo con x la misura del raggio di base del cilindro e del cono. La misura dell'altezza di entrambi è allora $2x$.



Calcoliamo l'area A_ℓ della superficie laterale del cono, in funzione di x. Indicando con a la misura dell'apotema del cono, la formula dell'area è:

$$A_\ell = \pi r a.$$

Calcoliamo a con il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = \sqrt{4x^2 + x^2} = \\ = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}\,.$$

Sostituendo nella formula dell'area, abbiamo:

$$A_\ell = \pi x \cdot x\sqrt{5} = \pi x^2 \sqrt{5}\,.$$

Calcoliamo l'area A'_ℓ della superficie laterale del cilindro, sempre in funzione di x.

Indicando con h l'altezza del cilindro, la formula dell'area è $A'_\ell = 2\pi rh$. Sostituendo in questa l'espressione di h in funzione di x, abbiamo:

$$A'_\ell = 2\pi x \cdot 2x = 4\pi x^2.$$

Poiché per ipotesi $A_t + A'_t = 12\pi(7+\sqrt{5})$, vogliamo determinare la somma $A_t + A'_t$ in funzione di x e poi uguagliare tale espressione a $12\pi(7+\sqrt{5})$.
Le due aree delle superfici totali si ottengono sommando quelle laterali con le aree dei tre cerchi di base, ognuno di area πx^2:

$$A_t + A'_t = A_\ell + A'_\ell + 3A_b,$$

ossia:

$$A_t + A'_t = \pi x^2\sqrt{5} + 4\pi x^2 + 3\pi x^2 =$$
$$= \pi x^2\sqrt{5} + 7\pi x^2 = \pi x^2(7+\sqrt{5}).$$

$$\frac{12\pi(\sqrt{5}+4)}{S} = \frac{4+\sqrt{5}}{4}, \quad \frac{S}{12\pi} = 4$$

da cui ricaviamo $S = 48\pi$.

Calcoliamo il raggio della sfera, invertendo la formula $S = 4\pi R^2$:

$$4\pi R^2 = 48\pi$$

$$R^2 = 12$$

$$R = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

La soluzione $-2\sqrt{3}$ non è accettabile, pertanto il valore cercato è $R = 2\sqrt{3}$ cm.

2. Calcoliamo il volume dei tre solidi per verificare l'uguaglianza. Scriviamo le formule dei volumi:

Uguagliando tale espressione al suo valore numerico, otteniamo l'equazione:

$$\pi x^2(7+\sqrt{5}) = 12\pi(7+\sqrt{5}),$$

da cui $x^2 = 12$ e $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

La soluzione $-2\sqrt{3}$ è negativa, quindi non accettabile, pertanto è:

$$x = 2\sqrt{3}.$$

Calcoliamo il raggio della sfera.

Poiché sappiamo che $\frac{A_\ell + A'_\ell}{S} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}$, calcoliamo $A_\ell + A'_\ell$.

Sostituiamo il valore $2\sqrt{3}$ a x e troviamo:

$$A_\ell = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{5} = 12\pi\sqrt{5}$$

$A'_\ell = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 48\pi$, da cui

$$A_\ell + A'_\ell = 12\pi\sqrt{5} + 48\pi.$$

Sostituendo nella relazione $\frac{A_\ell + A'_\ell}{S} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{4}$, otteniamo:

$$\frac{12\pi\sqrt{5} + 48\pi}{S} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h;$$

$$V(\text{cilindro}) = A_b \cdot h;$$

$$V(\text{sfera}) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

Poiché $A_b = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$:

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3} \cdot 12\pi \cdot 4\sqrt{3} = 16\pi\sqrt{3};$$

$$V(\text{cilindro}) = 12\pi \cdot 4\sqrt{3} = 48\pi\sqrt{3}.$$

Inoltre abbiamo:

$$V(\text{sfera}) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{3})^3 = 32\pi\sqrt{3}.$$

Osserviamo che la relazione fra i tre volumi è soddisfatta:

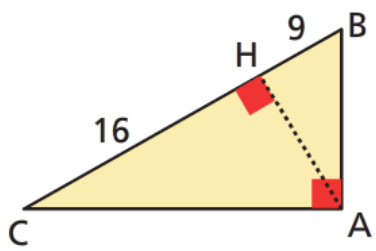
$$V(\text{sfera}) = V(\text{cilindro}) - V(\text{cono}) \rightarrow$$

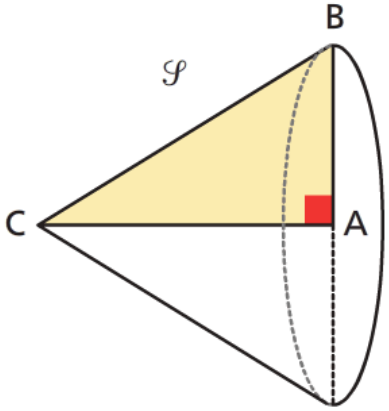
$$\rightarrow 32\pi\sqrt{3} = 48\pi\sqrt{3} - 16\pi\sqrt{3}.$$

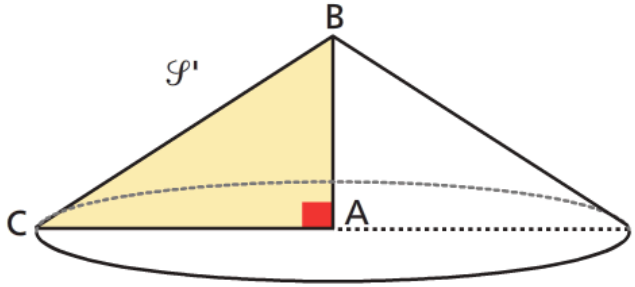
Il raggio della sfera è $2\sqrt{3}$ cm e il volume della sfera è uguale alla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.

ESERCIZIO GUIDA

Un triangolo rettangolo ha le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di 9 cm e 16 cm. Ruotando di 360° il triangolo attorno a un cateto otteniamo il solido $\mathcal{S}$, ruotandolo attorno all'altro cateto otteniamo il solido $\mathcal{S}'$. Determiniamo il rapporto fra i volumi e il rapporto fra le superfici laterali dei due solidi. Verifichiamo inoltre che i due rapporti sono uguali alla radice quadrata del rapporto fra le proiezioni date.







Dati $\overline{CH} = 16$;
$\overline{BH} = 9$.

Domande

1. $\dfrac{V(\mathcal{S})}{V(\mathcal{S}')}$?
2. $\dfrac{A_\ell(\mathcal{S})}{A_\ell(\mathcal{S}')}$?
3. I rapporti valgono $\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{3}{4}$?

Calcoliamo gli elementi del triangolo ABC:

$\overline{BC} = \overline{BH} + \overline{HC}$ ossia $\overline{BC} = 9 + 16 = 25$.

Con il secondo teorema di Euclide calcoliamo $\overline{AH}$:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12.$$

Calcoliamo $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ applicando il primo teorema di Euclide:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BH}}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25 \cdot 9} = 5 \cdot 3 = 15.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{CH}}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{25 \cdot 16} = 5 \cdot 4 = 20.$$

Calcoliamo il volume e l'area delle superfici laterali dei due solidi di rotazione.

- Calcoliamo il volume di $\mathcal{S}$ e l'area della superficie laterale. Non svolgiamo i calcoli, perché dobbiamo determinare dei rapporti, in cui sono possibili delle semplificazioni:

$$V(\mathcal{S}) = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 15^2) \cdot 20; \; A_\ell(\mathcal{S}) = \pi \cdot 15 \cdot 25.$$

- Calcoliamo il volume di $\mathcal{S}'$ e l'area della superficie laterale:

$$V(\mathcal{S}') = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 20^2) \cdot 15; A_\ell(\mathcal{S}') = \pi \cdot 20 \cdot 25.$$

- Verifichiamo che i rapporti fra i volumi e fra le aree sono uguali a $\sqrt{\frac{9}{16}}$ ossia a $\frac{3}{4}$:

$$\frac{V(\mathcal{S})}{V(\mathcal{S}')} = \frac{\frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 15^2) \cdot 20}{\frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot 20^2) \cdot 15} = \frac{15^2 \cdot 20}{20^2 \cdot 15} =$$

$$= \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{A_\ell(\mathcal{S})}{A_\ell(\mathcal{S}')} = \frac{\pi \cdot 15 \cdot 25}{\pi \cdot 20 \cdot 25} = \frac{3}{4}.$$

Il rapporto fra i volumi dei due solidi è uguale al rapporto fra le aree e tale rapporto vale $\frac{3}{4}$.